中值定理

对式子的处理

① 补阶数 $F'(x)-F'(y)=F'(z)$

$$\frac{F(x)}{F'(x)}=\frac{F'(x)}{F''(x)}$$

全部展开，大力出奇迹（构造积分函数）

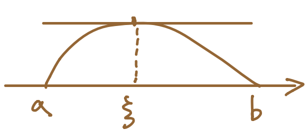
e.g. $$\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\Rightarrow \left(f(a)g'(\xi)-f(b)g'(\xi)\right)-\left(f'(\xi)g(a)-f'(\xi)g(b)\right)=0$$

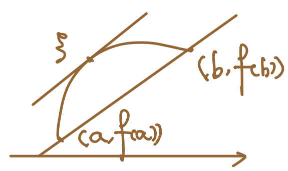
$$\Rightarrow F(x)=f(a)g(x)-f(b)g(x)-g(a)f(x)+g(b)f(x)$$

则 $F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0$

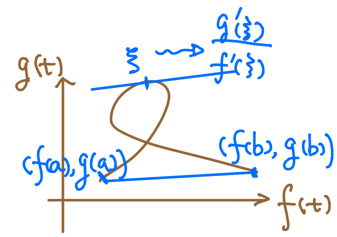
p.S.



罗尔中值



拉格朗日中值.



柯西中值

将f, g关于t参数化.

$$\Rightarrow \frac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$$

e.g. 设 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

$$\Rightarrow \exists\, \xi\in(a,b) \text{ 使 } \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$$

$$\Rightarrow f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$$

构造 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

$F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0$

e.g. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $$\frac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\Rightarrow f(a)g'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)+g(b)f'(\xi)=0$$

构造 $F(x)=(f(a)-f(x))(g(b)-g(x))\Rightarrow F(a)=F(b)=0$

$\Rightarrow F'(\xi)=0$.

② 不齐阶数，但两项齐次。 差一阶

$\square f''(x)+\square f'(x)=0$ （右边若非零，应可以移项化为如上形式）。

凑积分因子 $e^{g(x)}$.

考查 $(e^{g(x)}\cdot f(x))'=g'(x)\cdot e^{g(x)}\cdot f(x)+e^{g(x)}\cdot f'(x)=e^{g(x)}\cdot(\underbrace{f'(x)+g'(x)f(x)})$

$a(x)f''(x)+b(x)f'(x)=0$

令 $p(x)=f'(x)\Rightarrow a\cdot p'+b\cdot p=0\Rightarrow \underbrace{p'+\frac{b}{a}\cdot p=0}$

e.g. $f(a)=f(b)=0$, $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)+g'(\xi)\cdot f(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)$

e.g. $f'(0)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{\int-\frac{dt}{(t-1)^2}}\cdot f(x)=e^{\frac{1}{t-1}}f(x)$

e.g. $f(1)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})\cdot f(\xi)$

e.g. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$

③ 不齐阶，差一阶以上。 只能用 Taylor.

④ 有多个点：一个点对一个区间

习题

1. $f(0)=f(1)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

构造 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$. $\exists\eta\in(0,1)$. s.t. $f'(\eta)=0\Rightarrow F(\eta)=0$

另外 $F(1)=0$. $\Rightarrow\exists\xi\in(\eta,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

2. $f(0)=0$, $f(x)>0\ (0<x<1)$, $\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

$\Rightarrow 2f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$

$F(x)=f(x)^2\cdot f(1-x)$. $F(1)=0=F(0) \Rightarrow \exists\,\xi$ s.t. $F'(\xi)=0$.

3. $f'(a)=f'(b)=0$, $f(x)>0$. $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f(\xi)\cdot f''(\xi)=2(f'(\xi))^2$

二阶构造. $f\cdot f''-2f'^2=0$.

构造 $F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

4. 构两函数.

① $f(a)=f(b)$, $\exists\,\xi\in(a,b)$ s.t. $f(a)-f(\xi)=\dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$

$F(x)=x^2f(x)$, $G(x)=\dfrac{x^2}{2}$ $\quad F'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$

$$\Rightarrow \underset{\underset{\displaystyle 2f(a)}{\shortparallel}}{\frac{a^2f(a)-b^2f(b)}{\frac{a^2}{2}-\frac{b^2}{2}}} = \frac{2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)}{\xi}$$

② $f(0)=0$, $\forall x>0$, $\exists\, 0<\xi<x$ s.t. $f'(x)-\dfrac{f(x)}{x}=\xi f''(\xi)$

$F(x)=xf'(x)-f(x)$, $G(x)=2x$.

5. $f(0)=g(0)=0$, $g(x)>0$, $g'(x)>0$.

若 $f'(x)/g'(x)$ 在 $[0,a]$ $\uparrow$ $\Rightarrow f(x)/g(x)\uparrow$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-g'f}{g^2}=\frac{g'}{g}\left(\frac{f'g/g'-f}{g}\right)=\frac{g'}{g}\left(\frac{f'}{g'}-\frac{f}{g}\right)$$

$$=\frac{g'}{g}\left(\frac{f'}{g'}-\underbrace{\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}}_{\substack{\shortparallel \\ f'(\xi)/g'(\xi) \quad 0<\xi<x}}\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}-\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right)\geqslant 0$$

最小值和最大值），于是

$$m \leqslant f(x_1) \leqslant M, \quad ①$$

$$m \leqslant f(x_2) \leqslant M, \quad ②$$

$$\cdots\cdots \quad \vdots$$

$$m \leqslant f(x_n) \leqslant M. \quad ⓝ$$

由①+②+…+ⓝ，有 $nm \leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqslant nM$，故

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

由介值定理可知，存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例 1.6.2 （**定理 10　积分中值定理**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m，使得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

故

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

由介值定理可知，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，得证.

【注】 如何证明 $\xi \in (a,b)$？

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证明　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0 = f(\xi)(b-a), \xi \in (a,b),$$

得证.

考研真题中已经考过，可直接在大题中使用，不必证明再用.

给的点

下限可调与题目条件有关

$\int_0^x f(t)dt = F(x) \Rightarrow F(0)=0$

例 1.6.3 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \quad F(1)$$

$f(0)=0 \Longleftrightarrow F'(0)=0$

证明　$f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$，其中 m, M 分别是 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值.

由 $f(x)-f(0)=f'(\eta)(x-0)\ (0<\eta<x)$，有 $f(x)=xf'(\eta)$，因 $m \leqslant f'(\eta) \leqslant M$，所以

$$mx \leqslant f'(\eta)x = f(x) \leqslant Mx.$$

因此

$$\int_0^1 mx\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 Mx\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 2mx\,\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2Mx\,\mathrm{d}x,$$

故

$$m = 2m \cdot \frac{1}{2} \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2M \cdot \frac{1}{2} = M,$$

$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\xi)}{2}x^2=\frac{F''(\xi)}{2}x^2$，代入 $x=1$.

由介值定理可知,存在 $\xi\in[0,1]$,使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

2. 罗尔定理的使用

(1) 常用乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用来制造辅助函数.

①$[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$.

见到 $f(x)f'(x)$,作 $F(x)=f^2(x)$.

②$[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.

见到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$,作 $F(x)=f(x)f'(x)$.

③$[f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}+f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$,作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

【注】 常考以下情形.

(1)$\varphi(x)=x\Rightarrow$见到 $f'(x)+f(x)$,作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}$.

(2)$\varphi(x)=-x\Rightarrow$见到 $f'(x)-f(x)$,作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

(3)$\varphi(x)=kx\Rightarrow$见到 $f'(x)+kf(x)$,作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{kx}$.

例 1.6.4 设函数 $f(x)$ 可导,且 $f(x)f'(x)>0$,则( ).

$(f^2)'$

(A)$f(1)>f(-1)$ (B)$f(1)<f(-1)$

(C)$|f(1)|>|f(-1)|$ (D)$|f(1)|<|f(-1)|$

解 应选(C).

由 $f(x)f'(x)>0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'=f(x)f'(x)>0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调增加,从而 $f^2(x)$ 单调增加,由此可知

$$f^2(1)>f^2(-1),$$

两端开方得

$$|f(1)|>|f(-1)|.$$

例 1.6.5 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f(a)=f(b)=0$. 求证:对任意实数 α,都存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $\boxed{f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0}$.

$e^{\alpha x}$

证明 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$,则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且

$$F(a)=F(b)=0.$$

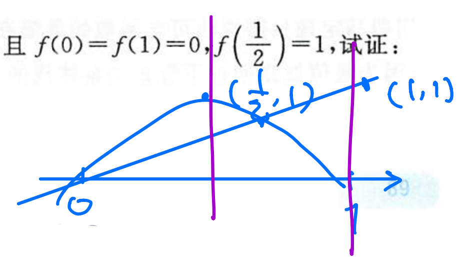
根据罗尔定理可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}+\alpha f(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}=0.$$

所以 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

例 1.6.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=f(1)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$,试证:

(1)存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $f(\eta)=\eta$;



$F'+G'F=0$

$\underbrace{(f'(\xi)-1)}_{F'}-\underbrace{\lambda}_{G'}\underbrace{(f(\xi)-\xi)}_{F}=0$

(2)对于任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证明 (1)令 $F(x)=f(x)-x$,则函数 $F(x)=f(x)-x$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续,且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由于 $F\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F(1)<0$,根据零点定理可知,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\eta)=0$,即 $f(\eta)=\eta$.

(2)令 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,则函数 $F(x)$在$[0,\eta]$上连续,在$(0,\eta)$内可导,$F(0)=F(\eta)=0$,即函数 $F(x)$在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件,于是存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得

$$F'(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]-\lambda e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0,$$

即
$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

(2)上面是证明一阶导数为 0,也就是使用一次罗尔定理的问题,但有些题目涉及二阶导数为 0,即要多次使用罗尔定理,这种问题难点一般不在辅助函数的构造,而是要找到函数值相等的三个不同点,即$f(a)=f(b)=f(c)$(不妨设 $a<b<c$),分别在$[a,b]$,$[b,c]$上使用罗尔定理,有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,$\xi_1\in(a,b)$,$\xi_2\in(b,c)$,进而在$[\xi_1,\xi_2]$上再对$f'(x)$使用罗尔定理,得 $f''(\xi)=0$,$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$.

积分中值定理

$\frac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0}=f(\eta)=f(0)$

例 1.6.7 设函数 $f(x)$在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内有二阶导数,且

$$\boxed{2f(0)=\int_0^2 f(x)\,dx=f(2)+f(3)},$$

证明:(1)存在 $\eta\in(0,2)$,使得 $f(\eta)=f(0)$;(2)存在 $\xi\in(0,3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(\alpha)$

0 η 2 α 3

$f'(m)=0$ $\quad$ $f(\alpha)=f(0)$

$f'(n)=0$

$f''(\xi)=0$

证明 (1) 设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt(0\leqslant x\leqslant 2)$,则$\int_0^2 f(x)dx=F(2)-F(0)$.

根据拉格朗日中值定理可知,存在 $\eta\in(0,2)$,使 $F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$,即

$$\int_0^2 f(x)dx=2f(\eta),$$

由题设 $\int_0^2 f(x)dx=2f(0)$,从而 $f(\eta)=f(0)$.

(2)由于 $f(x)$在$[2,3]$上连续,则其在$[2,3]$上必有最大值 M 和最小值 m,于是

$$m\leqslant f(2)\leqslant M,\quad m\leqslant f(3)\leqslant M,$$

故
$$m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理可知,存在 $\tau\in[2,3]$,使 $f(\tau)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$. 由题设,$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$,故 $f(\tau)=f(0)$,由(1)的结果可知 $f(0)=f(\eta)=f(\tau)$,且 $0<\eta<\tau\leqslant3$. 根据罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(0,\eta)$,$\xi_2\in(\eta,\tau)$,使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,从而存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

3. 费马定理的使用

证明某点导数为 0 除了构造辅助函数使用罗尔定理外,切记不可忘记还有定理 5(费马定理),使用费马定理只需说明可导函数的最值在区间内部取到,这类问题的题目往往带有不等式关系的条件(因为最值就是通过不等式关系体现的).

例 1.6.8 (导数零点定理)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导,证明当 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$ 时,存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f'(\xi)=0.$$

证明 不妨设 $f'_+(a)>0$,$f'_-(b)<0$,于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow 存在\ \xi_1>0,在\ (a,a+\xi_1)\ 内,f(x)>f(a),$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow 存在\ \xi_2>0,在\ (b-\xi_2,b)\ 内,f(x)>f(b).$$

故 $f(a)$ 与 $f(b)$ 均不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内取得最大值,根据费马定理可知,存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

$$f'(\xi)$$
$$\parallel$$
$$f'(b)<\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<f'(a)$$

4. 拉格朗日中值定理的使用

例 1.6.9 设 $a>b>0$,$n>1$,证明:$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

证明 设 $f(x)=x^n$,显然 $f(x)$ 在区间 $[b,a]$ 上连续,在 (b,a) 内可导,即 $f(x)$ 在区间 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,于是得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b),\xi\in(b,a),$$

由于 $f'(x)=nx^{n-1}$,因此上式即为

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b),$$

又由 $0<b<\xi<a$,$n>1$,有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b).$$

例 1.6.10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,证明:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使得 $f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)$.

证明 注意到 $3x^2f(x)+x^3f'(x)$ 是 $x^3f(x)$ 的导函数,故令 $F(x)=x^3f(x)$,易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件,于是得

$$F(1)-F(0)=F'(\xi),\xi\in(0,1),$$

即

$$f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi).$$

例 1.6.11 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(0)=0$,$f(1)=1$,证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$,使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

证明 用 ξ 将 $[0,1]$ 划分为 $[0,\xi]$,$[\xi,1]$. 在这两个区间上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理,得

$$f(\xi)-f(0)=f'(\xi_1)(\xi-0)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{\xi}{f(\xi)},\xi_1\in(0,\xi),$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\xi_2)(1-\xi)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1-\xi}{1-f(\xi)},\xi_2\in(\xi,1),$$

与欲证等式比较,只需证 $\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2$ 即可,于是可取 $f(\xi)=\frac{1}{2}$,则

$$\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2(\xi+1-\xi)=2,$$

命题得证.

【注】 这种反推思想值得借鉴.

5. 柯西中值定理的使用

例 1.6.12 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,$0<a<b$,证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$.

证明 因为 $f(x)$与 $g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq0(0<a<x<b)$,即 $f(x)$与$g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件,则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

即

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

$-F(-a) = -\int_0^{-a}$ $\quad F(a)$

$a^3\cdot F'''(\eta)=3\int_{-a}^{0}+\int_0^a=3(F(a)-F(-a))$

6. 泰勒公式的使用

$F(0)=0$

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

例 1.6.13 设 $f(x)$在区间$[-a,a]$$(a>0)$上具有二阶连续导数,$f(0)=0$.

(1)写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

$f(x)=\underbrace{f(0)}_{=0}+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$

(2) 证明:存在 $\eta\in[-a,a]$,使得 $\boxed{a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx}$.

$f(0)=0 \Leftrightarrow F(0)=0$

(1)**解** 对任意的 $x\in[-a,a]$,$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$,$\xi$ 介于 x 与 0 之间.

(2) **证明** $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$

因为 $f''(x)$在$[-a,a]$上连续,由最值定理:$m\leqslant f''(x)\leqslant M$,$x\in[-a,a]$,其中 m,M 分别是 $f''(x)$在$[-a,a]$上的最小值和最大值,有

要证:$\frac{a^3}{3}\cdot F'''(\eta)=F(a)-F(-a)$

$$mx^2\leqslant f''(\xi)x^2\leqslant Mx^2,$$

$$\frac{2}{3}ma^3=m\int_{-a}^{a}x^2dx\leqslant\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{2}{3}Ma^3,$$

$$\frac{a^3}{3}\cdot m\leqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=\int_{-a}^{a}f(x)dx\leqslant\frac{a^3}{3}\cdot M,$$

$F(a)=\cancel{F(0)}+\cancel{F'(0)\cdot a}+\frac{F''(0)}{2}\cdot a^2+\frac{F'''(\eta)}{6}a^3$

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\leqslant M,$$

由介值定理知,存在 $\eta\in[-a,a]$,使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx$,得证.

$F(-a)=\cancel{F(0)}+\cancel{F'(0)(-a)}+\frac{F''(0)}{2}\cdot(-a)^2+\frac{F'''(?)}{6}(-a)^3$

η

基础习题精练

习题

1.6.1 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$,则 $f'(0)$,$f'(1)$,$f(1)-f(0)$的大小顺序为(　　).

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ 　　(B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$