反常积分的敛散性

比较判别法

f, g 定义在 $[a,b)$ 上，以 b 为唯一奇点（可以取 $b=\infty$）

且 $|f(x)| \le |g(x)|,\ \forall x \in [a,b)$

则 g 绝对收敛 $\Rightarrow$ f 绝对收敛.

$\int_a^b |f|$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b |g|$ 发散　　⚠ f 发散 $\not\Rightarrow$ g 发散.

例：证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 绝对收敛

唯一奇点为 $+\infty$. 则 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$，$\forall x$ 成立

易知反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

例：证明 $\int_0^1 \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ 绝对收敛　　有可能让函数值 $\to \infty$ 的点.

0 是唯一奇点，关键在处理 $\ln \sin x$.

利用 $0 < \sin x < x$，$\forall 0<x<1$，有

$|\ln \sin x| < |\ln x| \Rightarrow |$原式$| \le \int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 发散　　错解.

实际上，$|\ln \sin x| > |\ln x|$

启示：在 0 到 1 上，很多不等式会反向，一定要小心！

① 判别时要求每个积分有且仅有一个奇点.

② 尺度 $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 0<p<1 \text{ 时，收敛，} \\ p \ge 1 \text{ 时，　发散，} \end{cases} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p>1 \text{ 时，收敛，} \\ p \le 1 \text{ 时，发散.} \end{cases} \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$（计算证明）

正解：先估计 $\ln \sin x$

$x \to 0^+$ 时，$\ln \sin x \sim \ln x$　（因为 $\sin x \sim x$）（利用洛必达法则）

存在 $C>1$，使得 $|\ln\sin x|\le C|\ln x|$，$\forall x\in(0,1]$.

用 $\ln x$ 与幂函数 $1/x^{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 相比，是无穷小量.

即 $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(x\to 0^{+})$，$\varepsilon>0$

也即 $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{\varepsilon}\ln x=0$，$\varepsilon>0$.

细节：一般情况取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 最稳.

取 $\varepsilon=1/4$，$\exists x_0\in(0,1)$，$\forall x\in(0,x_0)$

成立：$|\ln x|<\dfrac{1}{x^{1/4}}$，$\forall x\in(0,x_0)$

$$\Rightarrow \left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{C|\ln x|}{\sqrt{x}}<\frac{C}{x^{1/2}}\cdot\frac{1}{x^{1/4}}=\frac{C}{x^{3/4}}.$$

由 $\int_0^1\frac{1}{x^{3/4}}dx$ 收敛，原式绝对收敛.

若取 ε 较大，此式会发散.

2.对参数分情况讨论

例 8.15 若反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 收敛，求 a,b 的取值范围.

【解】 ① 当 $a=b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}1\,dx$，发散；

② 当 $a=0,b\neq 0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$，发散.

③ 当 $a\neq 0,b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$.

a. 若 $a>0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$，收敛；

e^{-ax}

(x)

✓

$a>0$

b. 若 $a<0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 发散.

④ 当 $a\neq 0,b\neq 0$ 时，用两次分部积分法，实现积分再现，得

配再算一次

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx-\int\frac{a^2}{b^2}e^{-ax}\cos bx\,dx,$$

于是
$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)+C,$$

且
$$\int_0^{A}e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}.$$

a. 若 $a>0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]=\frac{a}{a^2+b^2}$，收敛；

b. 若 $a<0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]$ 不存在，发散.

综上所述，只有 ③ 的 a 与 ④ 的 a 成立时，反常积分收敛，故当 $a>0$，b 任意时，反常积分收敛.

例：讨论积分$\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{|y-1|^{a+b}}dy$的敛散性.

不能积，因为1是奇点．共有3个奇点：0，1，+∞.

思路：化为$\int\frac{1}{x^p}$.

有可能让函数值→∞的点.

记被积函数$=f(y)$

$|f(y)|$在不同奇点有不同表现.

① $y=0$处：$y\to0^+$

$|f(y)|\sim y^{a-1}$　　$\int y^{a-1}$在$1-a<1$时收敛 $\Rightarrow a>0$.

② $y=1$处：$y\to1$

$|f(y)|\sim\frac{1}{|y-1|^{a+b}}$，$a+b<1$时收敛

③ $y\to+\infty$：

$|f(y)|\sim\frac{1}{y^{b+1}}$ $(y\to+\infty)$，$b>0$时收敛.

综上所述，$a>0$且$b>0$且$a+b<1$时，收敛且绝对收敛

否则发散.