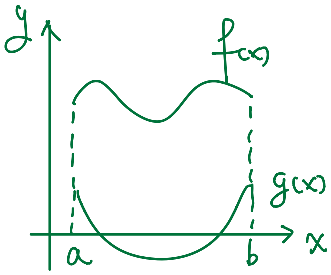
平面图形面积计算

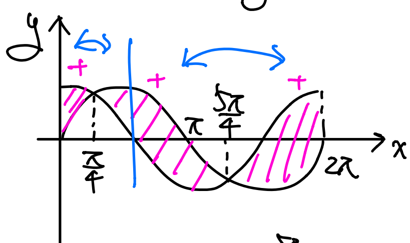
(一) 由 $f(x)$, $g(x)$ 所围面积



$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

难点：分段算绝对值积分.

例：求 $[0,2\pi]$ 上 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 围成的面积



$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,dx$$

$$=4\sqrt{2}.$$

注意到 $S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx$

一般方法：利用 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 辅助角公式

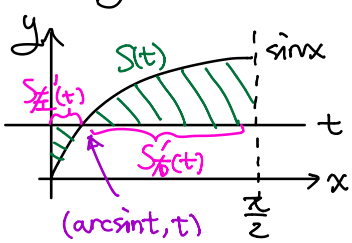
其中 $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$.

$$S=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi-\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=4\sqrt{2}.$$

不用画图也可以做.

例：$S(t)$ 是由 $y=\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=t$ 围出面积



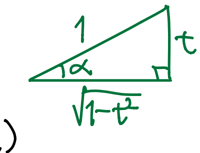
求 $S(t)$ 的最大/最小值

$$S(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|t-\sin x|\,dx$$

$$=\int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)\,dx+\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t)\,dx$$

$\Rightarrow S(t) = t\arcsin t + \cos(\arcsin t) - 1$

$+ \cos(\arcsin t) - t\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)$



$= 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\underline{\cos(\arcsin t)}$

令 $\alpha = \arcsin t$，$\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$= 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\sqrt{1-t^2}$.

$\Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t + \cancel{\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}} - \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}$

$= 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

$S'(t) = 0$ 的根是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S'(t)$ 左负右正. 极小值 $S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

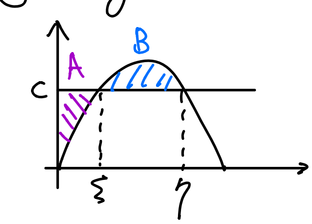
极大值 $\max\{S(1), S(0)\}$.

几何解释：$S'_{左}(t) = \arcsin t$

$S'_{右}(t) = -\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin t\right)$

$\Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

例：$y = c$ 与 $y = 2x - 3x^3$ 交于第一象限. 何种 c 可使 $A = B$？



$$\int_\xi^\eta (2x - 3x^3 - c)\,dx = \int_0^\xi (c - 2x - 3x^3)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\eta (2x - 3x^3 - c)\,dx = 0$$

即 $2\eta - 3\eta^3 = c$.

(二) 参数方程形式下的面积

情况一：$y = y(x)$，$a \le x \le b$ 由 $x = x(t)$，$y = y(t)$ 给定 $(\alpha \le t \le \beta)$.

没有 $y(x)$ 的显式表达式. $\rightsquigarrow$ 找 $y = y(t(x))$

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dr] & \\ x \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 需要找 $t(x)$ 作为 $x(t)$ 反函数（只有单调的函数有反函数）

本质：对 $\int_a^b y(x)\,dx$ 用换元法.

(i) 若 $x(t)$ 严格增. $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$

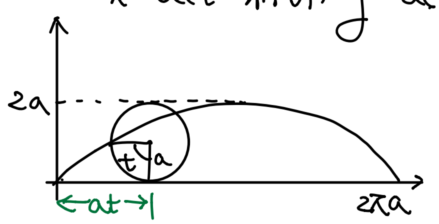
$$S=\int_a^b y(x)\,dx=\int_\alpha^\beta y(x(t))\cdot x'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

(ii) 若 $x(t)$ 严格减, $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$.

$$S=\int_a^b y(x)\,dx=-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

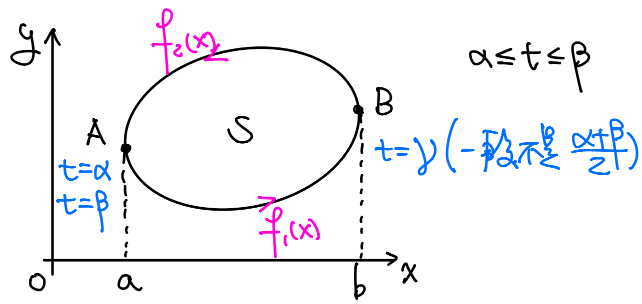
例: 求旋轮线一拱与x轴包围的面积.

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)\quad(0\le t\le 2\pi)$$



$$S=\int_0^{2a\pi} y(x)\,dx=\int_0^{2\pi} y(t)\,d(x(t))$$
$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)\,dt=\cdots.$$

情况二: 求由参数方程表示的封闭图形的面积.



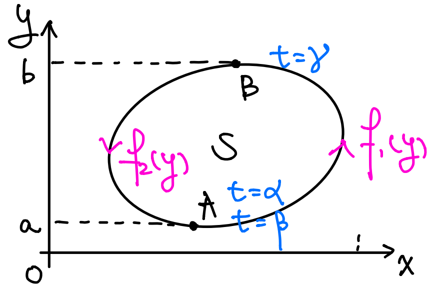
$\alpha\le t\le\beta$

$$S=\int_a^b(\underbrace{f_2(x)}_{\substack{x(t)\downarrow\\ -\int_\gamma^\beta}}-\underbrace{f_1(x)}_{\substack{x(t)\uparrow\\ +\int_\alpha^\gamma}})\,dx=-\int_\gamma^\beta y(t)\,d(x(t))-\int_\alpha^\gamma y(t)\,d(x(t))$$
$$=\boxed{-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t))}$$

差负号

类似地, y轴版本:

$$S=\int_a^b(f_1(y)-f_2(y))\,dy$$
$$=\int_\alpha^\gamma x(t)\,d(y(t))+\int_\gamma^\beta x(t)\,d(y(t))$$



$$= \boxed{\int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t))}$$

结论：上两式相加，除2，得

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\,dy(t) - y(t)\,dx(t))$$

有对称性
一般来说是最好的.

例：求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围面积

参数方程 $x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad (0\le t\le 2\pi)$

① 用 $S = \int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t)) = \int_\alpha^\beta x\,dy$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cdot \cos t\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\pi$$

② 用 $S = -\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)) = -\int_\alpha^\beta y\,dx$

$$\Rightarrow S = -\int_0^{2\pi} b\sin t\cdot a(-\sin t)\,dt = ab\pi$$

③ 用 $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\,dy - y\,dx$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(2\cdot ab\pi) = ab\pi.$$

例：求Descartes叶形线 $x^3+y^3=xy$ 在第一象限的面积

重要：多项式形式如何参数化？

$y = tx$，t = 到原点连线斜率

$\Rightarrow x^3+t^3x^3 = tx^2$ ⟵ 左右相差一次，可消 x^2.

$$\Rightarrow x(1+t^3) = t \Rightarrow x = \frac{t}{1+t^3},\ y = \frac{t^2}{1+t^3}.\ (0\le t\le +\infty)$$

若左右次数相差较大，试 $y = tx^n\ (n\ge 2)$.

$$\Rightarrow x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\ y'(t) = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}.$$

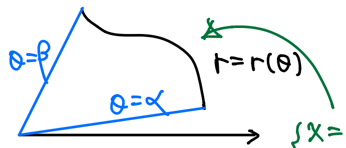
$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,dy - y\,dx = \cdots$$

虚假的广义积分（后面有理分式，可算不定积分）.

(三) 极坐标下的面积

设定 设曲线极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，

求该曲线与 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围面积

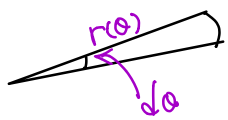


$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$

① 换直角坐标 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

只能得到一个边界.

② 更好的方法：分割成小圆弧

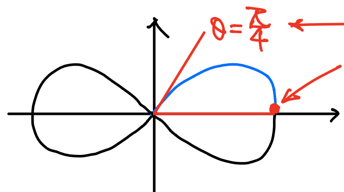


$S=\frac{1}{2}r(\theta)^2\cdot d\theta$

弧长：$r(\theta)\cdot d\theta$ ⟿ 近似成三角形 $S=\frac{1}{2}r(\theta)\cdot r(\theta)\cdot d\theta$

结论：$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$.

例：双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta$ 所围的面积



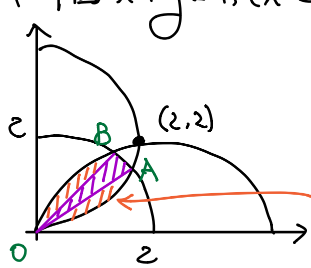
从式子中可看出来：

$r^2=a^2\cos2\theta\ge0 \Rightarrow \cos2\theta\ge0$

第一象限内：$\left.\begin{array}{l}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \cos2\theta\ge0\end{array}\right\} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta\,d\theta$$
$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\,d(2\theta)=a^2.$$

例：求三个圆 $x^2+y^2\le4$，$(x-2)^2+y^2\le4$，$x^2+(y-2)^2\le4$ 所围面积



$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\alpha=2\alpha=\frac{\pi}{3}$.

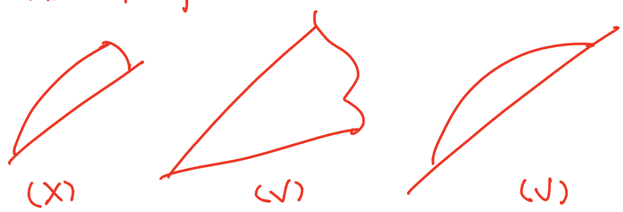
$S_{一个弓形}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot16\sin^2\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$

$x^2+y^2=4y \Leftrightarrow r=4\sin\theta$，$0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$.

$\Rightarrow S_{两个弓形} = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$,

$\Rightarrow S = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$.

⚠ 必须有一侧边界是直线



(X) (√) (√)