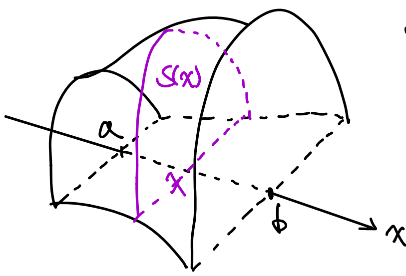
旋转体的体积

(一) 一般体积公式

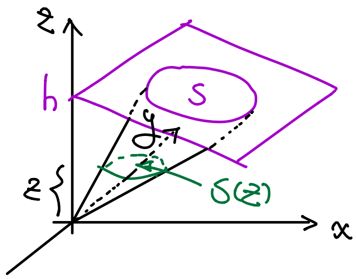
设这：一个几何体夹在空间垂直于两张平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 $(a<b)$.



对于每个 $x\in[a,b]$，用平面 $X=x$ 去截，截面积 $S(x)$.

$$\Rightarrow\ V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

例：求底面积为 S，高为 h 的圆锥体体积.



相似三角形 $\Rightarrow S(z)=\dfrac{z^2}{h^2}S$

$$\Rightarrow V=\int_0^h \frac{z^2}{h^2}S\,dz=\frac{1}{3}Sh.$$

例：求 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $(a,b,c>0)$.

用平行于 XOY 的截面 $Z=z$，$-c\le z\le c$ 去截椭球.

截面为椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2}$.

$$\Longleftrightarrow\ \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1.$$

$$\Rightarrow S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

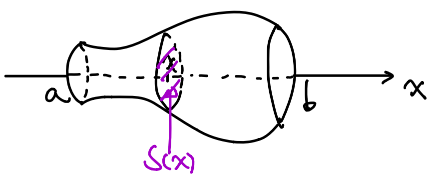
$$\Rightarrow V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=2\pi ab\left(c-\frac{c^3}{3c^2}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(二) 旋转体的体积

设定 由曲边梯形 $\{(x,y) \mid a \le x \le b,\ 0 \le y \le y(x)\}$

围绕 x 轴旋转一周所得立体旋转体.



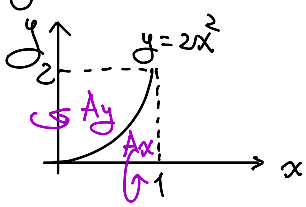
$$V = \int_a^b \pi (y(x))^2 \, dx$$ ← 中心实心

$(y(x))^2 - 0^2 = (y(x))^2$.

注: 若中心是空心的, 当 $S(x)$ 为圆环算

$\Rightarrow S(x) = \pi(y_2^2 - y_1^2)$. $(y_1(x) \le y \le y_2(x))$.

例: $y = 2x^2$ $(0 \le x \le 1)$ 决定两个曲边梯形



$A_x = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2x^2\}$

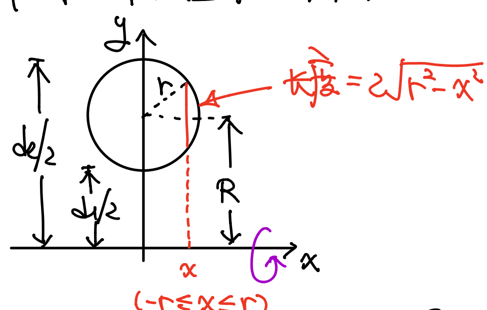
$A_y = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 2x^2 \le y \le 2\}$ ← 对但没用 需要换成 y 范围 (关于 dy 积)

$= \{(x,y) \mid 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le \sqrt{\frac{y}{2}}\}$.

$\Rightarrow V_x = \int_0^1 \pi y^2 \, dx = \pi \int_0^1 4x^4 \, dx = \frac{4}{5}\pi$.

$V_y = \int_0^2 \pi x^2 \, dy = \pi \int_0^2 \frac{y}{2} \, dy = \pi$.

例: 求一个救生圈的体积, 内直径 d_1, 外直径 d_2.



对于 $-r \le x \le r$,

$X = x$ 生成的截面为圆环

外半径 $R + \sqrt{r^2 - x^2}$

内半径 $R - \sqrt{r^2 - x^2}$.

$\Rightarrow S(x) = \pi(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - \pi(R - \sqrt{r^2 - x^2})^2$

$= 4\pi R \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\Rightarrow \quad V = \int_{-r}^{r} 4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 8\pi R \underbrace{\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx}_{\frac{\pi}{4}r^2,\ \frac{1}{4}\text{圆的面积}}$$

$$= 2\pi^2 R r^2.$$

其中 $R = \frac{1}{4}d_1 + \frac{1}{4}d_2$，$r = \frac{d_2}{4} - \frac{d_1}{4}$.

注：Guldin定理：$V =$ 小面积 × 周长 $= \pi r^2 \cdot 2\pi R$.

(不能自己用).

平面图形围绕不穿过其内部的轴

旋转得到的体积 = 面积 × 形心旋转得到的周长

图形的重心