二重积分

(一) 一般区域上的二重积分

f在D上可积，D可以表示成 x型区域

$$D=\{(x,y)\mid y_1(x)\le y\le y_2(x),\ a\le x\le b\}$$

关于x

且对每个固定x，$\varphi(x)=\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ 存在，

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

同理，若D可表示为 y型区域

$$D=\{(x,y)\mid x_1(y)\le x\le x_2(y),\ c\le y\le d\}$$

关于y

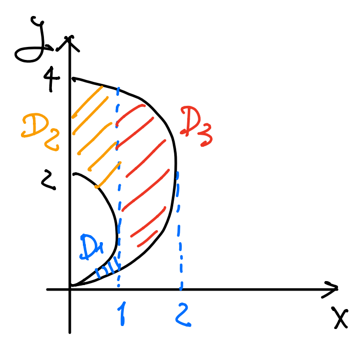
且对每个固定y，$\psi(y)=\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ 存在.

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

一般区域：分解为x与y型区域的并.

以方便计算为原则，决定积分顺序.

例：$D=\{(x,y)\mid 2y\le x^2+y^2\le 4y,\ x\ge 0\}$



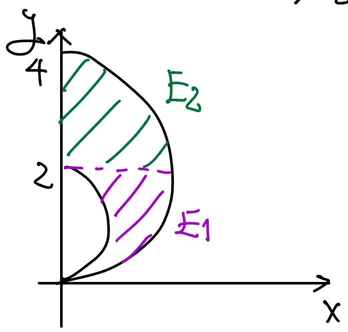
① 表示为x型：

$$D_1=\{2-\sqrt{4-x^2}\le y\le 1-\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}$$

$$D_2=\{1+\sqrt{1-x^2}\le y\le 2+\sqrt{4-x^2},\ 0\le x\le 1\}$$

$D_3 = \{2-\sqrt{4-x^2} \le y \le 2+\sqrt{4-x^2},\ 1\le x\le 2\}$

$\Rightarrow D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$.



② 表示为y型:

$E_1 = \{\sqrt{2y-y^2} \le x \le \sqrt{4y-y^2},\ 0 \le y \le 2\}$

$E_2 = \{0 \le x \le \sqrt{4y-y^2},\ 2 \le y \le 4\}$

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 = D$.

注:当 $f(x,y)$中含有x^2+y^2项

或 D的边界表达式中含有x^2+y^2项,

则 可利用 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

先化为极坐标下二重积分,

然后关于r和θ的二次积分去求解.

例: 将上题的D分解成r型区域和θ型区域.

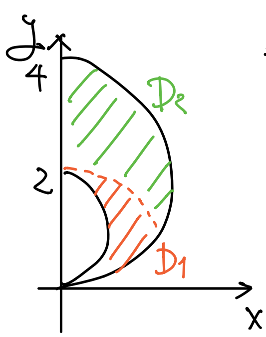
在极坐标系中, D的边界

$x^2+y^2=2y \longleftrightarrow r^2 = 2r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r = 2\sin\theta}$

$x^2+y^2=4y \longleftrightarrow r^2 = 4r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r = 4\sin\theta}$

$x = 0 \longleftrightarrow r\cos\theta = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$.

表示为r型区域:



$\Rightarrow D_1 = \begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ \arcsin\frac{r}{4} \le \theta \le \arcsin\frac{r}{2} \end{cases}$

$D_2 = \begin{cases} 2 \le r \le 4 \\ \arcsin\frac{r}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

$D = D_1 \cup D_2$.

表示为 θ 型区域：$D=\begin{cases} 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \\ 2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta \end{cases}$

例：求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

Key 长得像极坐标积分

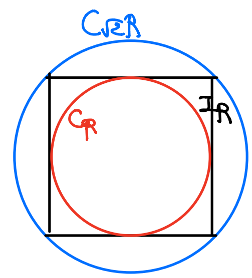
但区域不是圆：用夹逼

⚠不要试图将方形写成极坐标

会变得不幸.

记 $I_R=\iint\limits_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$C_R=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$



$\rightsquigarrow\ C_R=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2e^{-r^2}\cdot(r\,dr)$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3e^{-r^2}dr=\pi\int_0^{R^2}te^{-t}dt$

$=\pi(1-e^{-R^2}-R^2e^{-R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$

同理 $C_{\sqrt2R}=\pi(1-e^{-2R^2}-2R^2e^{-2R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$

利用 $C_R\le I_R\le C_{\sqrt2R}$ 夹逼，得到 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=\pi$.

例：作极坐标替换，将

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

化成定积分，其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}.$$

令 $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$.

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=\iint\limits_{\Phi}f(r)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^1dr\int_0^{\pi/4}f(r)\,r\,dr+\int_1^{R}\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r}\right)f(r)\,r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} f(r)\, r\,dr - \int_1^{\sqrt{2}} \arccos\frac{1}{r}\, f(r)\cdot r\,dr \qquad \square$$

(二) 二重积分的变量替换

直角—极坐标互化:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow \boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\varphi}$$

例: 求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 所围面积.

应用广义极坐标替换

$$x = a\rho\cos\theta,\quad y = b\rho\sin\theta.$$

$\Rightarrow J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ab\rho$, 原式 $\Leftrightarrow \rho^2 = \cos 2\theta$ (双纽线)

数学分析学过:

对于变量代换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases}$ $(u,v)\in D'$

应满足 行列式 $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

在 D' 内无零点, 即 $J \neq 0,\ \forall (u,v)$.

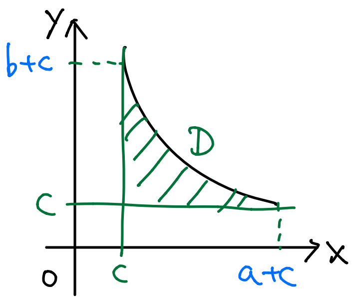
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v), y(u,v))\cdot J\cdot du\,dv$$

所以 $S = \iint_D dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} ab\rho\, d\rho = ab.$

例: 求 $\iint_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) dx\,dy$, ← 本例想说: 万物都可极坐标化

其中 D 由 $x=c$, $y=c$ 和

曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} = 1$ 所围成. $(a,b,c>0)$.



令 $x = c + a\rho\cos^4\theta$, $y = c + b\rho\sin^4\theta$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} = \sqrt{\rho}\cdot\cos^2\theta + \sqrt{\rho}\cdot\sin^2\theta = \sqrt{\rho}$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^4\theta & b\sin^4\theta \\ -4a\rho\cos^3\theta\cdot\sin\theta & 4b\rho\sin^3\theta\cdot\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

积分区域化为 $\{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 1\}$.

于是 $$\iint_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\, d\rho = \frac{2}{15}ab.$$

不重要的话：一般而言，广义极坐标变换

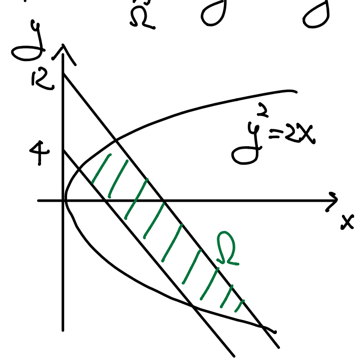
$$x = \frac{1}{a}\left(c + r^{\frac{1}{p}}\cdot\cos^{\frac{2}{p}}\theta\right),\quad y = \frac{1}{b}\left(d + r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\right)$$

能将 $(ax-c)^p + (by-d)^p$ 变成 r.

但其中 r, θ 不再有通常的极径、极角之意义

（所以不要对着图想当然地写变换区域）.

例：求 $I = \iint_\Omega (x+y)\,dxdy$，其中 Ω 由 $y^2 = 2x$, $x+y=4$, $x+y=12$ 围成.



作变换 $u = x+y$, $v = y$

$\rightsquigarrow$ 区域：$\begin{cases} 4 \le u \le 12 \\ -1-\sqrt{2u+1} \le v \le -1+\sqrt{2u+1}. \end{cases}$

且 $J = 1$. 于是

$$I = \int_4^{12} u\,du \int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}} dv$$

$$= \int_4^{12} 2u\sqrt{2u+1}\,du \quad (\sqrt{2u+1} = t)$$

$$= \int_3^5 (t^2-1)t^2\,dt = \frac{8156}{15}.$$

Last Tips 奇偶性和积分区域对称性可用来简化计算.

① D关于x轴对称 + 关于y奇/偶

$* \quad f(x,y) = -f(x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 关于y奇.

$* \quad f(x,y) = f(x,-y)$

取半边D

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{y\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$ 关于y偶

② D关于y轴对称 + 关于x奇/偶

$* \quad f(x,y) = -f(-x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$ 关于x奇

$* \quad f(x,y) = f(-x,y)$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$ 关于x偶

③ D关于(0,0)中心对称

$* \quad f(x,y) = -f(-x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 两侧相反

$* \quad f(x,y) = f(-x,-y)$

$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy$ 两侧相同

D^+为D在第一象限的部分.