# 多元函数极限

## 求多元函数极限的常用方法:

1. 利用函数连续性 + 极限运算性质
2. 不等式放缩 或 夹逼定理 ← 一般是夹0和某个趋于0的式子.
3. 利用变量替换 ⇝ 化简为已知极限.

   e.g. 令三角的: $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$, $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{t}=1$, ⚠ 此处t只能与x和y其一有关

   令指数的: $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t=e$.

4. 初等变形: 分母有理化、指对数形式取对数.

   $\cancel{\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}}$

## (一) 二重极限(若存在)的计算

例1: 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ← 次数: 分子 > 分母 ⇒ 极限 = 0.

基本方法: 预期极限为0时,

极坐标代换 ⇝ 化为 有界量 × 无穷小量.

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$$

无论θ为何, $r\to 0$ 即可.

⇒ 二元化一元.

例2: 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

错解: $\sin(x^3+y^3)\sim x^3+y^3$, $(x,y)\to(0,0)$.

此处是对的, 但不能对所有二元极限做此操作!

修正方法: Taylor展开 (一元, 对 $x^3+y^3$)

$$\sin(x^3+y^3)=x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)\quad(|x|+|y|\to 0)$$

$$\Rightarrow \text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

另法：不等式放缩．　　经典方法：$\sin(\cdots)$都可这样做．

$$|\sin(x^3+y^3)| \le |x|^3+|y|^3 \le (|x|+|y|)(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \text{原式} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = 0.$$

例3：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x}, & x \ne 0 \\ y, & x=0,\ y\ne 0 \end{cases}$

绝对放缩：

$$|f(x,y)| = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin xy}{x}\right| \le |y|, & x\ne 0 \\ |y|, & x=0 \ \&\ y\ne 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

若上下不一致，写较大的那个．

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

例4：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$．　　先求其对数的极限．

先找 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$：

　　　　极限为0．

放缩 $|xy\ln(x^2+y^2)| \le r^2\ln r^2 \ (r\to 0^+)$，$r^2=x^2+y^2$．

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = e^0 = 1.$$

例5：证明 $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$　　底数极限不总是存在！

check：$x^2\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)$ 极限不存在．

使用夹逼方法：

注意到 $x>0,\ y>0$ 时：$0 < \dfrac{xy}{x^2+y^2} \le \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow 0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0 \Rightarrow$ 原式 $=0$.

## (二) 累次极限

<u>核心命题</u> 当重极限存在：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$

(1) $y \neq y_0$ 时，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在，

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = A$$

(2) $x \neq x_0$ 时，$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = A.$$

解释：① 二重极限存在 + 二次极限存在

$\Rightarrow$ 二次极限 = 二重极限

② 一般情况下，两者无必然联系

e.g. 二重极限存在
- 两个二次极限均不存在
- 有且仅有一个存在

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y) = 0$

但 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ 不存在.

e.g. 二重极限不存在
- 两个二次极限存在且相等
- 有且仅有一个存在

$\uparrow\ f(x,y)=\dfrac{y}{x},\ x\neq 0$

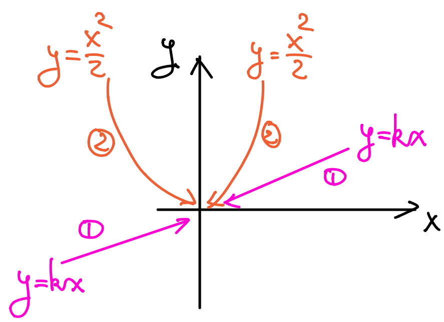
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在

且 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0.$

## (三) 证明重极限不存在的方法

**方案一：找两种特殊的趋近方式（使得在两种方式下极限不同）.**

例：$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2\le|y| \text{ 或 } y=0\\ 1, & \text{其它.}\end{cases}$




① 沿 $y=kx$：$(x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0$

② 沿 $y=\dfrac{x^2}{2}$：$(x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } y=0\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$ （否则不可能有 $x^2\le|y|=\dfrac{x^2}{2}$）

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y=x^2/2)\to(0,0)} f(x,y)=1.$

由①②，重极限不存在.

**方案二：证明两个累次极限存在但不相等**

（如果两个二次极限存在 + 二重极限存在，

由命题，三个极限应相等，矛盾）.

例：$f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$ 可见重极限不存在.