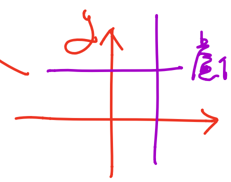
多元函数的连续性

连续性定义

如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

⚠ $f(x,y)$ 对 x 和 y 分别都连续 $\not\Rightarrow$ $f(x,y)$ 对 (x,y) 连续.

e.g. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$



虚假的连续.

在全平面分别对 x 和 y 均连续.

但作为二元函数，在原点不连续.

例：令 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0 \\ y, & x=0. \end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在定义域上均连续.

证明：$f(x,y)$ 之定义域为 $xy>-1$

且 $f(x,y)$ 在 $x\neq0$ 处连续.

只需证 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上各点连续.

① 在 $(0,0)$：$f(0,0)=0$，而 $x\neq0$ 时

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+xy)}{x} = \begin{cases} 0, & y=0 \\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}, & y\neq0. \end{cases}$$

又由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = 1$

$\Rightarrow \exists\, \delta_1>0,\ \forall\, 0<|x|<\delta_1,\ 0<|y|<\delta_1$,

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right| \le |y|\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right| \le 2|y|.$$

只要 $|x|<\delta_1$, $|y|<\delta_1$，无论在 $x=0$ 或 $x\neq0$ 均有

$$|f(x,y)| \le 2|y|.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

② 在 $(0,y_0)$，$y_0 \neq 0$：

当 $x\neq 0$ 时，
$$|f(x,y)-f(0,y_0)| = \left|y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} - y_0\right|$$
$$= \left|y\left(\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1\right) + (y-y_0)\right|$$
$$\leq |y|\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1\right| + |y-y_0|.$$

而当 $x=0$ 时，$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |y-y_0|$.

注意到当 $y_0\neq 0$ 时
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = 1,$$

结合上述各式得
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \left(f(x,y)-f(0,y_0)\right) = 0.$$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ 在 $(0,y_0)$ 处连续，从而在其定义域上连续.

顺便一提：

$f(x,y)$ 对 x 和 y 分别连续 $+$ $f(x,y)$ 关于 x 或 y 单调

$\Rightarrow$ $f(x,y)$ 关于 (x,y) 作为二元函数连续.