偏导数

(一) 偏导数的定义

二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

类似可以定义 $f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

例: 求 $f(x,y)=\begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处偏导数.

$$\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\quad \frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\ln(\Delta y)^2$$

$\Rightarrow f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)$ 不存在.

多元函数偏导定义来自一元版本 ⇝ 所有一元运算法则均适用.

e.g. 四则运算 & 链式法则.

(二) 偏导数与连续

⚠ 一元函数: 可导 $\Rightarrow$ 连续

二元函数: 在某点 f_x, f_y 均存在 $\not\Rightarrow$ 连续

反例: $f(x,y)=\begin{cases} 1, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0\end{cases}$

甚至不存在极限

$\Rightarrow f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但 f 在 $(0,0)$ 不连续.

连续性判别法

$f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且有界

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 连续

证明：$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$

$= (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)) + (f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0))$

利用一元函数微分中值定理

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$(0<\theta_1, \theta_2<1)$

f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 邻域内有界 $\Rightarrow \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$.

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 处二元连续.

具体操作方法

6. 偏导数的连续性

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为：

①用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

②用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立．若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的．

高阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy}.$$

需要知道 f_{xy} 与 f_{yx} 不总是相等，具体条件不须知道.