全微分

(一) 全微分的定义与基本性质

5. 可微

先看一个引例. 如图 1-11-10 所示, 设矩形的长和宽分别为 x 和 y, 则此矩形的面积 $S=xy$.

若 x, y 分别增长 $\Delta x, \Delta y$, 则该矩形面积的增量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

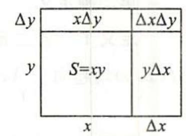


图 1-11-10

上式右端由两部分组成: 一部分是 $y\Delta x+x\Delta y$, 它是关于 $\Delta x, \Delta y$ 的线性函数; 另一部分是 $\Delta x\Delta y$, 因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}=0,$$

所以当 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ 时, $\Delta x\Delta y$ 是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小量, 即

$$\Delta S=y\Delta x+x\Delta y+o(\rho)\ (\rho\to 0).$$

$y\Delta x+x\Delta y$ 是 ΔS 的主要部分, $o(\rho)$ 是误差,

$$\Delta S\approx y\Delta x+x\Delta y.$$

称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为函数 $S=xy$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$S=x^2y$

$\Delta S=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y$

$=\cancel{\Delta x^2}(y+\Delta y)+2x\cdot\Delta x(y+\Delta y)$

$=2xy\cdot\Delta x$

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域上有定义. 如果

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o(r)$$

例: $e^{\frac{1}{\Delta x}}$ 就不可微.

仅与 (x_0,y_0) 有关而与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的常数

$r^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$

则称 f 在 (x_0,y_0) 可微, 称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为全微分.

记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$

可微 = 在该点附近, $f(x,y)$ 可被 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

f 在 (x_0,y_0) 可微 $\Rightarrow$ 在 (x_0,y_0) 附近邻域内有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx \underbrace{f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y}_{\text{线性}}$$

其中 $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$, $B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

最终版本: $dz = f_x dx + f_y dy$

或 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$.

例: 求 $A = \sqrt{1-(1.004)^2+(1.994)^2}$ 的近似值

取 $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^2}$, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$

$\Delta x = 0.004$, $\Delta y = -0.006$.

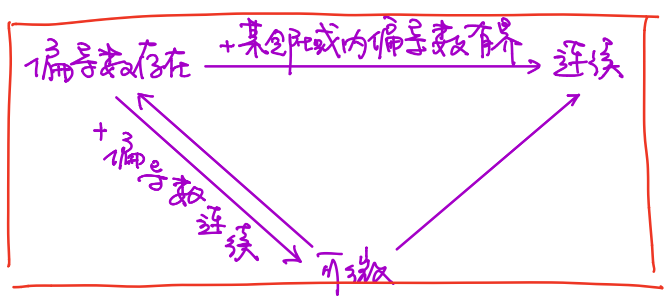
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 1$.

$\Rightarrow A = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(1,2) - \frac{1}{2}\cdot(0.004) + 1\cdot(-0.006) = 1.992$.

(二)连续、偏导数存在与可微

导数: 只变一个变量

微分: 所有变量同时变一点



由此得: 证明f不可微的常用方法:

(1) 证$f(x,y)$在(x_0,y_0)处至少有一个偏导数不存在 ← 慎用

(2) 证$f(x,y)$在(x_0,y_0)不连续

(3) 从定义出发, 证 $\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y \neq o(r)$.

其中 $r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$.

例: 设 $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. 证明: (1) f在$(0,0)$连续

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$都存在

(3) $f(x,y)$在$(0,0)$不可微.

(1) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $|\Delta f| = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

定义：$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \left(f(0,0)+\Delta f\right) = 0 = f(0,0)$$

(2) 按定义（而非按求导法则）计算：

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

用第(3)条.
比较 $o(r)$.

(3) $\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$，则

$$\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{r} = \frac{|\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \to 1/\sqrt{2} \neq 0$$

所以上式 $\neq o(r)$，f 在 $(0,0)$ 不可微.

例：利用上述第(1)(3)条：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

例 13.7 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

【证】易知 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，从而

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0, \text{由定义}\end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0. \text{由定义}\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}}f_x'(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x=y\\y\to 0}}f_y'(x,y)$ 都不存在，故 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $(0,0)$ 处均不连续.

又由 $\Delta f=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故在点 $(0,0)$ 处，当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta f-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}\to 0$，

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

分子 $=o(r)$. (3)用在这里

例：再用第(3)条解题：

例 13.8 二元函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$处可微的一个充分条件是(C).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$ ← 离谱

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且$\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ ← 需偏导数连续（看三角图）

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ ← r ⇒ 分子 $=o(r)$

(D) $\lim\limits_{a\to 0}[f'_x(a,0)-f'_x(0,0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$ ← 这种的⚠：关于x,y分别连续推不出二元连续.

$f'(x)$ ← 和 $x\to 0$ 的 x 不同.

偏导数连续：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_x(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\right)=0$

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_y(\Delta x,\Delta y)-f'_y(0,0)\right)=0$

三个容易出现的误解

(1) $f(x,y)$在某点邻域内存在偏导数

但在该点不一定连续，从而不一定可微.

(2) $f(x,y)$在某点连续，

但偏导数不一定存在，从而不一定可微.

(3) $f(x,y)$在某点可微，

但在该点偏导数不一定连续.