隐函数存在定理与求导

(一)隐函数存在定理

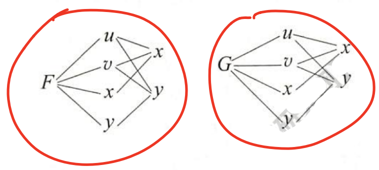
1. 一个方程的情形

设 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，若满足①$F(P_0)=0$；②$F_z'(P_0)\neq 0$，则在 P_0 的某邻域内可确定 $z=z(x,y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}.$$

2. 方程组的情形

设$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$若记$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$(以后同)，当满足$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$时，可确定$\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y).\end{cases}$其复合结构图为



且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

记不住的话
就要能看图写式子.

思想：视 $F(x,y)=0$ 为方程，x为已知量，可解出y作为未知量.

1中：① $F(P_0)=0$ ⟿ F在P_0处满足方程.

② $F_x(P_0)\neq 0$ ⟿ 这一定是一个以x为已知量的方程

(若 $F_x=0$，则与x无关，意味着已知量x无处可用).

2中：$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 可理解为：

F与u,v间的关联方式不能与G与u,v间的关联方式一样

(否则会导致方程相互消去，已知量u不能充分发挥作用，

这样就不足以解未知量v).

(二) 隐函数求导

例1: 设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数.

求 z_x, z_y, z_{xy}.

① 先求 z_x. 在 $F(x-y,y-z)=0$ 两侧对 x 求导, 得

$$F_1 - z_x F_2 = 0 \Rightarrow z_x = \frac{F_1}{F_2}.$$

② 求 z_y. 可用公式 $z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-F_1+F_2}{-F_2} = \frac{F_2-F_1}{F_2}$.

③ 求 z_{xy}.

在 $F_1 - z_x F_2 = 0$ 两边对 y 求导, 得

$$-F_{11} + F_{12}(1-z_y) - \left((-F_{21}+F_{22}(1-z_y))z_x + F_2 z_{xy}\right) = 0$$

将 z_y, z_x 表达式代入, 有

$$-F_{11} + F_{12}\cdot\frac{F_1}{F_2} - \left(\left(-F_{21}+F_{22}\cdot\frac{F_1}{F_2}\right)\cdot\frac{F_1}{F_2} + F_2 z_{xy}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow z_{xy} = \frac{1}{F_2^3}\left(2F_1F_2F_{12} - F_2^2F_{11} - F_1^2F_{22}\right)$$

也可先在 $F_1-F_2+F_2z_y=0$ 两边对 x 求导, 然后解出 z_{xy}.

(三) 求已知函数组所确定的隐函数组之导数

例1: 设 $u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t)$, $g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ 确定.

且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$. 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法1: 先认清函数关系

因为 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$,

$g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ $\rightsquigarrow$ z,t 为 y 的函数

$\Rightarrow$ u = 以 z,t 为中间变量的 x,y 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 z'(y) + f_4 t'(y).$$

代入

对原方程关于 y 求导:

$$g_y + g_z z' + g_t t' = 0$$
$$h_z z' + h_t t' = 0$$

$$\Rightarrow \quad z' = -g_y h_t \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}, \quad t' = g_y h_z \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y - g_y(f_z h_t - f_t h_z)\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.$$

解法2: 直接考虑方程组

$$F(x,y,z,t;u) = 0, \quad g(y,z,t) = 0, \quad h(z,t) = 0,$$

其中 $F(x,y,z,t,u) = u - f(x,y,z,t)$. 由于

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)} = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ 可视 x, y 为自变量, u, z, t 为 x, y 之函数

对3个方程关于 y 求导: $u_y - f_y - f_z z_y - f_t t_y = 0$

$$g_y + g_z z_y + g_t t_y = 0$$
$$h_z z_y + h_t t_y = 0$$

解三个方程得到结果.

例2: 设 $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$, $z = \sin\varphi$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1:

$$\begin{tikzcd} z & \varphi \arrow[l] & x \arrow[l] \\ & & y \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

前两个方程 $\Rightarrow \varphi = \varphi(x,y), \ \psi = \psi(x,y)$

$$\Rightarrow z = \sin\varphi = \sin\varphi(x,y).$$

$$\Rightarrow z_x = \cos\varphi \cdot \varphi_x$$

前两个方程对 x 求导

$$\rightsquigarrow \quad 1 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi + \cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x$$

$$0 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\psi_x.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_x = -\cos\psi/\sin\varphi, \quad \psi_x = -\sin\psi/\cos\varphi.$$

代入 $z_x = \cos\varphi\cdot\varphi_x = -\cot\varphi\cdot\cos\psi$

对 x 求导 $\Rightarrow$ $z_{xx} = \dfrac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 1}{\sin^3\varphi}$.

解法2：找方程. 观察：$x^2+y^2+z^2=1$,

两边对 x 求两次导　　(y, x 是独立变量)

$$x + z z_x = 0, \quad 1 + z_x^2 + z z_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_x = -\frac{x}{z},$$

$$z_{xx} = -\frac{z^2+x^2}{z^3} = \frac{y^2-1}{z^3} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi - 1}{\sin^3\varphi}.$$

例3：设 $u = f(x-ut, y-ut, z-ut)$, $g(x,y,z)=0$. 试求 u_x, u_y.

这时 t 是自变量 or 因变量？

两个方程确定两个隐函数.

第一个是 u. 第二个？

由第二个方程，为 z.

$\Rightarrow$ t 是自变量.

分别关于 x 求导得.

$$u_x = f_1(1-u_x t) + f_2(-u_x t) + f_3(z_x - u_x t)$$

$$g_1 + g_3 z_x = 0.$$

解此方程组得

$$u_x = \frac{f_1 + f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t}, \quad u_y = \frac{f_2 + f_3\left(-\frac{g_2}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t}.$$