无穷级数

(一) 关于 n^p 和 $\ln^p n$ 的感觉

① p-级数，关于 $\ln n$ 和 n 的级别问题

$\sum \frac{1}{n}$ d.（发散）　　$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ c.　　$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p<1)$ d.

$\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon>0)$ $(x\to+\infty)$

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ c.　　$\sum \frac{\ln n}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{\ln^k n}{n^2}$ $(k=1000, 10000)$. c.

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n}$ d.　　$\sum \frac{1}{n\ln^{1+\varepsilon} n}$ c.

e.g. $\ln\ln x = o((\ln x)^{\varepsilon})$.

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n\cdot \ln(\ln n)}$ d.

正常的例子：

$\sum \frac{n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n\ln n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n+1}{n^2\ln n} \sim \sum \frac{1}{n\ln n}$ d.

② 等价量判别法

若 $b_n\geq 0$, $a_n>0$, $\forall n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c$（正常数）.

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同 c./d.

e.g. $\sum \frac{n}{n^2+1}$,　$a_n = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ d. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ d.

e.g. $\sum \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ c.

$\underline{\ln n = o(n^{\varepsilon})\ (n\to+\infty),\ \forall \varepsilon>0 \text{ 成立}.}$

取 $\varepsilon = \frac{3}{14}$. $a_n \leq \frac{n^{\frac{3}{14}}}{n^{\frac{3}{2}}}$

判别法对非正项级数不成立！

反例 $\underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \sum a_n$

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \to 1 \ (n\to+\infty)$

$\Rightarrow a_n \sim b_n$. $\sum a_n \sim \sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c.

但: $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n} = \sum b_n + \sum \frac{1}{n}$ d.

不对.

e.g. (1) $\sum \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p>1, & c \\ p\le 1, & d \end{cases}$, (2) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $\begin{cases} p>1, & c. \\ p\le 1, & d \end{cases}$

(3) $\sum \frac{1}{n\cdot \ln n (\ln\ln n)^p}$ $\begin{cases} p>1. & c \\ p\le 1. & d. \end{cases}$

e.g. (1) $\sum \frac{1}{n^{\ln r}}$ $\begin{cases} r>e \\ r\le e \end{cases}$

$n^{\ln r} = r^{\ln n}$ (换底公式)

(2) $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$

$\ln\ln\ln n \le 1$ (有限项)

$\ln\ln\ln n > 1$. c

$\Rightarrow$ c.

(3) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$ d. $\frac{1}{(\ln n)^{\infty}} \sim \frac{1}{n}$ (d.)

总结: ①换底

②次数带n，看成有限/无限两部分

例 16.9 下列级数中发散的是(D).

(A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$ c. (B) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ c.

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ $n-\ln n \ge \frac{n}{1000}$ c. (D) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \ln(\ln n)}$ d.

【解】应选(D). 高阶无穷小只能乘除,不能加减

初值 x_0 的选取无关.

例 16.3 判别下列级数的敛散性: 指数函数 $> n^p$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$; c. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$; d.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-9\cos n}{n\sqrt{5n+3}}$. 有限 $\sim \frac{2n-9 \text{ or } 2n+9}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}$ d.

1.14.1 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \cdots n!$

1.14.2 判别级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的敛散性.

1.14.3 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，试证：　　和 $\frac{1}{n^p}$ 比

(1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛；　$u_n \sim \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，且 u_n 单调减少，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 都收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛；$\to \frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$

(4) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛. $\to \frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$

e.g. (1) $\sum\frac{1}{\ln(n!)}$　　$\ln(n!) = \ln 1 + \cdots + \ln n \le n\ln n$

$\Rightarrow \sum\frac{1}{\ln(n!)} \ge \sum\frac{1}{n\ln n}$ d.

(2) $\sum\frac{\ln(n!)}{n^p} \le \sum\frac{n\ln n}{n^p} = \sum\frac{\ln n}{n^{p-1}} \Rightarrow p>2$ c.

$\ln n! > \frac{n}{1000} \Rightarrow \sum\frac{\ln n!}{n^p} > \sum\frac{\frac{n}{1000}}{n^p} \sim \frac{1}{n^{p-1}}$　$p\le 2$, d.

(3) $\sum\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2 k}{n^p} \le \sum\frac{n\ln^2 n}{n^p} \sim \frac{\ln^2 n}{n^{p-1}} \sim \frac{1}{n^{p-1}}$　$p>2$, c.

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \ln^2 n > \frac{n}{1000} \Rightarrow p\le 2$, d.

(4) $\sum\frac{1}{n^2-\ln n}$ c.　　放缩 $\leftrightarrow \ln e^n \sim n$

(5) $\sum\frac{\ln(e^n+n^2)}{\underbrace{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}}_{\sim n^2}\cdot\underbrace{\ln^2(n+1)}_{\sim \ln^2 n}} \sim \sum\frac{n}{n^2\ln^2 n} \sim \sum\frac{1}{n\ln^2 n}$ c.

额外的变形：对抽象的 a_n 进行操作.　　前提 $a_n>0$!

已知 $\sum a_n$ 发散 $\longrightarrow$ 假设 $a_n=\frac{1}{n}$

(1) $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ d.

过程　若 a_n 无界：$\frac{a_n}{1+a_n}\to 1\ (n\to\infty) \Rightarrow$ d.

若 a_n 有界：$a_n\le M$，$\frac{a_n}{1+a_n} \ge \frac{a_n}{M+1} \Rightarrow$ d.

(2) $\sum\frac{a_n}{1+na_n} = \sum\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n}$ d.

e.g. $a_n = \begin{cases} 1, & n=m^2 \\ \frac{1}{n^2}, & 其它 \end{cases} \Rightarrow \sum a_n$ d.

但 $\sum \frac{a_n}{1+na_n} < \underbrace{\sum_{n=m^2} \frac{1}{1+n}}_{=\sum \frac{1}{1+m^2}} + \underbrace{\sum_{其它} \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}}}_{=\sum \frac{1}{n^2+n}} \sim \sum \frac{2}{n^2}$ c.

(3) $\sum \frac{a_n}{1+n^2a_n} \le \sum \frac{a_n}{n^2a_n} = \sum \frac{1}{n^2}$, c.

(4) $\sum \frac{a_n}{1+a_n^2}$ d.

换底

$$\boxed{\oslash^{\ln \bullet} = \bullet^{\ln \oslash}}$$

习题：(1) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln\ln n}}$ c.

(2) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$ d.

(3) $\sum \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ $\begin{cases} \frac{n^3(\sqrt{2}-1)^n}{3^n} \sim \frac{(\sqrt{2}-1)^n}{3^n} \\ \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} \sim \frac{(\sqrt{2}+1)^n}{3^n} \end{cases}$ c.

(4) $\sum \frac{(\ln\ln n)^{100}}{\underbrace{\ln n\cdot\ln n!}_{\le n\ln^2 n}} \sim \sum \frac{1}{\ln n\cdot \ln n!}$ c.

③ 柯西判别法 和 达朗贝尔判别法 (服务于某些 $n!$ 或 $(\cdot)^n$)

正项 $\sum a_n$.

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$. $\rho<1 \Rightarrow$ c. $\rho>1 \Rightarrow$ d.
  $\rho = 1 \Rightarrow$ 不定.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, $l<1 \Rightarrow$ c. $l>1 \Rightarrow$ d.
  $l=1 \Rightarrow$ 不定.

柯西强于达朗贝尔.

e.g. $\sum \frac{1}{n!}$ c. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < 1\right)$

$\sum \frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n}$ $\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{1+\frac{1}{n}} < 1$ $(0<x<1)$

$\Rightarrow$ $0<x<1$: c. $x>1$: d.

$x=1$: $\sum \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \sim \sum \frac{1}{e}$ $\quad (1+\frac{1}{n})^n \to e\ (n\to\infty)$. d.

$$\sum \frac{1+(-1)^n}{n}\ln^n x \qquad \sqrt[n]{a_n} = |\ln x| \frac{\sqrt[n]{1+(-1)^n}}{\sqrt[n]{n}} \to |\ln x| \quad (n\to\infty)$$

(奇数项为0，不能用达朗贝尔了).

e.g. $\sum \frac{6^n}{5^n+7^n} \rightsquigarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{6}{\sqrt[n]{7^n+5^n}}$

引理：$a>b>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\Leftarrow e^{\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} \sim e^{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n} \to e^0 = 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{6}{7} < 1 \quad$ C.

5月23日 回顾

1\. $\sum \frac{\ln\left(1+\boxed{\frac{(3+(-1)^n)\arctan n}{n}}\right)}{\ln^2 n - \ln\ln n}$

$\sim \frac{(3+(-1)^n)\arctan n^{(有界)}}{n} \sim \frac{1}{n}$, $\to 0$

分母 $\sim \ln^2 n$

整体 $\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

2\. $\sum \frac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[3]{n^3-2}\cdot\ln^3(n+2)}$

$\ln n < n$, $\ln(1+\ln n) < \ln(1+n) \sim \ln n$

$\sqrt[3]{n^3-2} \sim n$, $\ln^3(n+2) \sim \ln^3 n$

$\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

3\. $\sum \frac{\sqrt{n^{100}+1}}{2^n}$, $\sqrt{n^{100}+1} \sim n^{50}$ C.

2^n 指数函数

4\. $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

换底. $= \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$ 有限项后成为 $\frac{1}{n^{1+?}}$, C.

$\bigcirc^{\ln \bullet} = \bullet^{\ln \bigcirc}$

补充：① 关于 n, $\ln n$ (n^k, $\ln^k n$) 的感觉

② 关于指数函数的感觉：$a^n \gg n^b$.

③ 关于 $n!$ 和 a^n：$n! \gg a^n$

④ 关于 n^n 和 $n!$：$n^n > n!$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$：令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$，证 $\sum a_n$ 收敛 ($\Rightarrow a_n \to 0$).

根值：$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < 1 \ (n\to\infty)$.

$\Rightarrow n^n \gg n!$

但是 $(n!)^2 \gg n^n$ (同理可证)

总结：$(n!)^2 \gg n^n \gg n! \gg a^n \gg n^p \gg \ln^p n$.

(二) 交错级数

· Leibniz 型级数. $\sum u_n$

3个条件: (1) $u_n=(-1)^n b_n$ 或 $(-1)^{n+1} b_n$, $b_n>0$.

(2) b_n 单调递减 $\Big\} \; b_n \searrow 0$.

(3) $b_n \to 0 \quad (n\to\infty)$

e.g. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ c. $\quad \sum\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ c. $\quad \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ c.

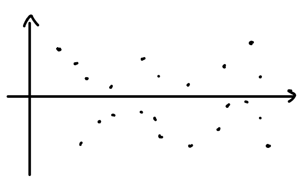
· 绝对收敛

· $\sum|u_n|$ c. $\Rightarrow \sum u_n$ c.

· $\sum |u_n|$ c. 称 $\sum u_n$ 绝对收敛 (a.c.)

$\sum u_n$ c. 但 $\sum|u_n|$ d. 称 $\sum u_n$ 条件收敛 (d.c.)

· 级数的正负分解 (不重要)



$$\begin{cases} a_n^+ = \max\{a_n,0\}\ge 0 \\ a_n^- = -\min\{a_n,0\} = \begin{cases} -a_n, & a_n<0\\ 0, & a_n\ge 0\end{cases} \rightsquigarrow a_n^-\ge 0 .\end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum a_n = \underbrace{\sum a_n^+}_{\ge 0} - \underbrace{\sum a_n^-}_{\ge 0} \qquad \begin{cases} \sum a_n \text{ a.c.} \Rightarrow \sum a_n^+, \sum a_n^- \text{ c.} \\ \sum a_n \text{ d.c.} \Rightarrow \sum a_n^+ \text{ d}, \sum a_n^- \text{ d.}\end{cases}$$

e.g. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt n}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt n}\right) = \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt n}}_{\text{d.c.}} + \sum\frac{1}{n}$. d.

(三) Abel-Dirichlet 判别法

Abel判别法: $\underset{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}{\underset{\uparrow}{\sum a_n}}$ 收敛, $\underset{M}{\underset{\uparrow}{\{b_n\}}}$ 单调有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛.

Dirichlet判别法: $\sum a_n$: S_n有界 ← e.g. $\pm1, \sin n, \cos n$.

$\left.\begin{matrix} \sum a_n: S_n\text{有界} \\ \{b_n\}\text{单调收敛于}0\ (b_n \searrow 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sum a_n b_n$收敛.

(Dirichlet 比 Abel 强).

例3: (1) $\sum a_n$, c. $\Rightarrow \sum \frac{n a_n}{n+1}$ c.

Abel, $\frac{n}{n+1}$单调有界.

(2) $\sum a_n$. c, $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{n^\sigma}$ $(\forall \sigma > 0)$ c.

习题: (1) $\sum (-1)^n \cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}}_{\searrow 0}$ c.

(2) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$ c.

$= \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{2n}} = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2n}}{\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)\left(1 - \frac{(-1)^n}{2n}\right)}$

$= \sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{d.c.}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}} - \sum \overbrace{\frac{1}{2n^{3/2}}}^{\text{c.}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4n^2}}$

单调有界

(3) $\sum \frac{\cos n}{n}$ c.

$\sum \cos n$ 有界. Dirichlet

(4) $\sum (-1)^n \cdot \frac{\sin^2 n}{n}$ c.

① 若 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1} |u_n|$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ 发散).

找反例 = 找 $(-1)^n$.

① 升次数:

e.g. $u_n \to u_n^2$.

$u_n \to u_n \cdot u_{n+1}$

$u_n \to u_{n-1} \cdot u_n \cdot u_{n+1}$

② 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\begin{cases} u_n \geqslant 0 \text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 收敛}(\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \text{从某项起}, u_n < 1, u_n^2 < u_n), \\ u_n \text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{ 不定(反例:} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 收敛,但} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ 发散).} \end{cases}$

③ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\begin{cases} u_n \geqslant 0 \text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1} \text{ 收敛} \left(u_n \cdot u_{n+1} \leqslant \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{2}\right), \\ u_n \text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n u_{n+1} \text{ 不定(反例:} u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ u_n u_{n+1} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \\ \text{级数发散).} \end{cases}$

$a_n \geqslant 0 \Rightarrow$ c.

否则找反例

④ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散).

⑤ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{n}$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散).

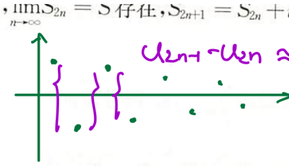
$\Downarrow$

$\sum \frac{u_n}{n}$ c.

$u_n \geqslant 0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{2n-1}$ 均收敛,

$\cdots S_{2n} = (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + \cdots + (u_{2n-1} + u_{2n})$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$ 存在, $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} =$

$S + \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = S$, 即可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.)



$u_{2n-1} - u_{2n} \approx 2$倍绝对值.

⑧ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ 不定.

(四) 收敛域. 收敛半径.

函数项: $\sum a_n(x-x_0)^n$, $x=x_0$ 时为0. (无论a_n为何).

① a_n收敛得好, $|x-x_0|$可以较大, 也能保证 $\sum a_n(x-x_0)^n$ c.

② 反之, $|x-x_0|$只能较小.

收敛半径 $\rho = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

例 16.14 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n+1}$ 的收敛域.

缺项: 不要直接计算a_n的比值.

利用整体法、比值判别法.

【解】 此级数缺少偶次幂的项. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n+3}}{3^n x^{2n+1}}\right| = 3x^2,$$

所以当 $3x^2 < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $3x^2 > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数发散. 故级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 当 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数成为 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}$, 显然发散.

因此, 幂级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.