目录

有理三角函数积分	万能代换
定积分	(一) 几个经典问题
	(二) 对称性在积分计算中的应用
反常积分的敛散性	(一) 比较判别法
	(二) 参数分情况讨论
平面图形面积计算	(一) $f(x)$, $g(x)$ 所围面积
	(二) 参数方程形式下的面积
	(三) 极坐标下的面积
旋转体的体积	(一) 一般体积公式
	(二) 旋转体的体积
二重积分	(一) 一般区域上的二重积分
	(二) 二重积分的变量替换
多元函数极限	(一) 二重极限(若存在)的计算
	(二) 累次极限
	(三) 证明重极限不存在的方法
多元函数连续性	
偏导数	(一) 偏导数的定义
	(二) 偏导数连续
全微分	(一) 定义与基本性质
	(二) 连续、偏导数存在与可微
链式法则	
隐函数存在定理与求导	(一) 隐函数存在定理
	(二) 隐函数求导
	(三) 求已知函数组所确定隐函数组之导数

中值定理

对式子的处理

① 升阶数 $F'(x)-F'(y)=F'(z)$

$$\frac{F(x)}{F'(x)}=\frac{F'(x)}{F''(x)}$$

全部展开，大力出奇迹 (构造积分函数)

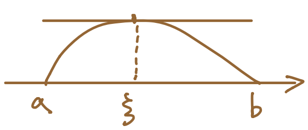
e.g. $\dfrac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\Rightarrow (f(a)g'(\xi)-f(b)g'(\xi))-(f'(\xi)g(a)-f'(\xi)g(b))=0$

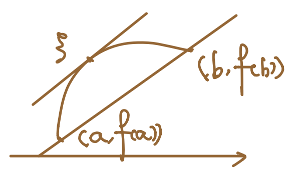
$\Rightarrow F(x)=f(a)g(x)-f(b)g(x)-g(a)f(x)+g(b)f(x)$

则 $F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0$

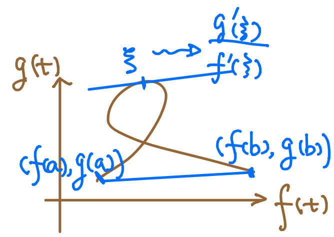
p.S.



罗尔中值



拉格朗日中值.



柯西中值

将f, g关于t参数化.

$\Rightarrow \dfrac{g(b)-g(a)}{f(b)-f(a)}=\dfrac{g'(\xi)}{f'(\xi)}$

e.g. 设 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

$\Rightarrow f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

构造 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$

$F(a)=F(b)\Rightarrow F'(\xi)=0$

e.g. 证明 $\exists\,\xi\in(a,b)$ 使 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

$\Rightarrow f(a)g'(\xi)-f(\xi)g'(\xi)-f'(\xi)g(\xi)+g(b)f'(\xi)=0$

构造 $F(x)=(f(a)-f(x))(g(b)-g(x))\Rightarrow F(a)=F(b)=0$

$\Rightarrow F'(\xi)=0.$

② 不齐阶数，但两项齐次。差一阶

$\square f''(x)+\square f'(x)=0$ （右边若非零，应可以移项化为如上形式）.

凑积分因子 $e^{g(x)}$.

考查 $(e^{g(x)}\cdot f(x))'=g'(x)\cdot e^{g(x)}\cdot f(x)+e^{g(x)}\cdot f'(x)=e^{g(x)}\cdot(f'(x)+g'(x)f(x))$

$a(x)f''(x)+b(x)f'(x)=0$

令 $p(x)=f'(x) \Rightarrow a\cdot p'+b\cdot p=0 \Rightarrow p'+\frac{b}{a}\cdot p=0$

e.g. $f(a)=f(b)=0$, $\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)+g'(\xi)\cdot f(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)$

e.g. $f'(0)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)-(\xi-1)^2f''(\xi)=0$

构造 $F(x)=e^{\int-\frac{dt}{(t-1)^2}}\cdot f(x)=e^{\frac{1}{t-1}}f(x)$

e.g. $f(1)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})\cdot f(\xi)$

e.g. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\exists\xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)=\lambda f(\xi)$

③ 不齐阶，差一阶以上，只能用 Taylor.

④ 有多个点：一个点对一个区间

习题

1. $f(0)=f(1)=0$, $\exists\xi\in(0,1)$, s.t. $f''(\xi)=\frac{2f'(\xi)}{1-\xi}$

构造 $F(x)=(1-x)^2f'(x)$. $\exists\eta\in(0,1)$. s.t. $f'(\eta)=0 \Rightarrow F(\eta)=0$

另外 $F(1)=0$. $\Rightarrow \exists\xi\in(\eta,1)$ s.t. $F'(\xi)=0$.

2. $f(0)=0$, $f(x)>0\ (0<x<1)$, $\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $\frac{2f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$

$\Rightarrow 2f'(\xi)\cdot f(1-\xi)-f(\xi)\cdot f'(1-\xi)=0$

$F(x) = f(x)^2 \cdot f(1-x)$. $F(1) = 0 = F(0) \Rightarrow \exists \xi$ s.t. $F'(\xi) = 0$.

3. $f'(a) = f'(b) = 0$, $f(x) > 0$. $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(\xi) \cdot f''(\xi) = 2(f'(\xi))^2$

降阶数. $f \cdot f'' - 2f'^2 = 0$.

构造 $F(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)^2}$

4. 柯西中值.

① $f(a) = f(b)$, $\exists \xi \in (a,b)$ s.t. $f(a) - f(\xi) = \dfrac{\xi f'(\xi)}{2}$

$F(x) = x^2 f(x)$, $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$ $F'(x) = 2x f(x) + x^2 f'(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a^2 f(a) - b^2 f(b)}{\frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2}}}_{= 2f(a)} = \frac{2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi)}{\xi}$$

② $f(0) = 0$, $\forall x > 0$, $\exists\, 0 < \xi < x$ s.t. $f'(x) - \dfrac{f(x)}{x} = \xi f''(\xi)$

$F(x) = x f'(x) - f(x)$, $G(x) = 2x$.

5. $f(0) = g(0) = 0$, $g(x) > 0$, $g'(x) > 0$.

若 $f'(x)/g'(x)$ 在 $[0,a]$ $\uparrow$ $\Rightarrow$ $f(x)/g(x)$ $\uparrow$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{g'}{g}\left(\frac{f'g/g' - f}{g}\right) = \frac{g'}{g}\left(\frac{f'}{g'} - \frac{f}{g}\right)$$

$$= \frac{g'}{g}\left(\frac{f'}{g'} - \underbrace{\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)}}_{= f'(\xi)/g'(\xi)\ \ 0<\xi<x}\right) = \frac{g'(x)}{g(x)}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right) \geqslant 0$$

最小值和最大值)，于是

$$m \leqslant f(x_1) \leqslant M, \quad ①$$

$$m \leqslant f(x_2) \leqslant M, \quad ②$$

$$\cdots\cdots \quad \vdots$$

$$m \leqslant f(x_n) \leqslant M. \quad ⓝ$$

由①+②+…+ⓝ，有 $nm \leqslant f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \leqslant nM$，故

$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n} \leqslant M.$$

由介值定理可知，存在 $\xi \in [x_1, x_n]$，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

例 1.6.2 （**定理 10　积分中值定理**）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在最大值 M 与最小值 m，使得

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a),$$

故

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M,$$

由介值定理可知，存在 $\xi \in [a,b]$，使得 $f(\xi)=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，得证.

【注】　如何证明 $\xi \in (a,b)$?

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi \in (a,b)$，使 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

证明　令 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，在 $[a,b]$ 上用拉格朗日中值定理 $\Rightarrow F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，

即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - 0 = f(\xi)(b-a), \xi \in (a,b),$$

得证.

考研真题中已经考过，可直接在大题中使用，不必证明再用.

给的点

下限们调与题目条件有关

$$\int_0^x f(t)dt = F(x) \Rightarrow F(0)=0$$

例 1.6.3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有一阶连续导数，$f(0)=0$，证明：存在 $\xi \in [0,1]$，使得

$$f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

F(1)

$$f(0)=0 \Leftrightarrow F'(0)=0$$

证明　$f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $m \leqslant f'(x) \leqslant M$，其中 m, M 分别是 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值和最大值.

由 $f(x)-f(0)=f'(\eta)(x-0)\ (0<\eta<x)$，有 $f(x)=xf'(\eta)$，因 $m \leqslant f'(\eta) \leqslant M$，所以

$$mx \leqslant f'(\eta)x = f(x) \leqslant Mx.$$

因此　$$\int_0^1 mx\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 Mx\mathrm{d}x,\quad \int_0^1 2mx\mathrm{d}x \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 2Mx\mathrm{d}x,$$

故

$$m = 2m\cdot\frac{1}{2} \leqslant 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 2M\cdot\frac{1}{2} = M,$$

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{F''(\xi)}{2}x^2=\frac{F''(\xi)}{2}x^2$$，代入 $x=1$.

由介值定理可知，存在 $\xi\in[0,1]$，使得 $f'(\xi)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

2. 罗尔定理的使用

(1) 常用乘积求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$ 的逆用来制造辅助函数.

①$[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$.

见到 $f(x)f'(x)$，作 $F(x)=f^2(x)$.

②$[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$.

见到 $[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$，作 $F(x)=f(x)f'(x)$.

③$[f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}+f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

见到 $f'(x)+f(x)\varphi'(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$.

【注】 常考以下情形.

(1) $\varphi(x)=x\Rightarrow$ 见到 $f'(x)+f(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}$.

(2) $\varphi(x)=-x\Rightarrow$ 见到 $f'(x)-f(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$.

(3) $\varphi(x)=kx\Rightarrow$ 见到 $f'(x)+kf(x)$，作 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{kx}$.

例 1.6.4 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则（ ）.

$(f^2)'$

(A) $f(1)>f(-1)$　　(B) $f(1)<f(-1)$

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

解 应选(C).

由 $f(x)f'(x)>0$ 知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'=f(x)f'(x)>0,$$

则 $\frac{1}{2}f^2(x)$ 单调增加，从而 $f^2(x)$ 单调增加，由此可知

$$f^2(1)>f^2(-1),$$

两端开方得

$$|f(1)|>|f(-1)|.$$

例 1.6.5 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$. 求证：对任意实数 α，都存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $\boxed{f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0.}$

$e^{\alpha x}$

证明 令 $F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$，则 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且

$$F(a)=F(b)=0.$$

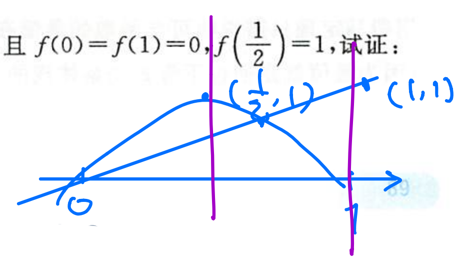
根据罗尔定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}+\alpha f(\xi)\mathrm{e}^{\alpha\xi}=0.$$

所以 $f'(\xi)+\alpha f(\xi)=0$.

例 1.6.6 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $f(\eta)=\eta$；



$F'+G'F=0$

$$\underbrace{(f'(\xi)-1)}_{F'}-\underbrace{\lambda}_{G'}\underbrace{(f(\xi)-\xi)}_{F}=0$$

(2)对于任意实数 λ,必存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

证明 (1)令 $F(x)=f(x)-x$,则函数 $F(x)=f(x)-x$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续,且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由于 $F\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F(1)<0$,根据零点定理可知,存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\eta)=0$,即 $f(\eta)=\eta$.

(2)令 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,则函数 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续,在 $(0,\eta)$ 内可导,$F(0)=F(\eta)=0$,即函数 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上满足罗尔定理的条件,于是存在 $\xi\in(0,\eta)$,使得

$$F'(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-1]-\lambda e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0,$$

即

$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

(2)上面是证明一阶导数为 0,也就是使用一次罗尔定理的问题,但有些题目涉及二阶导数为 0,即要多次使用罗尔定理,这种问题难点一般不在辅助函数的构造,而是要找到函数值相等的三个不同点,即 $f(a)=f(b)=f(c)$(不妨设 $a<b<c$),分别在 $[a,b]$,$[b,c]$ 上使用罗尔定理,有 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,$\xi_1\in(a,b)$,$\xi_2\in(b,c)$,进而在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上再对 $f'(x)$ 使用罗尔定理,得 $f''(\xi)=0$,$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$.

积分中值定理

$$\frac{\int_0^2 f(x)dx}{2-0}=f(\eta)=f(0)$$

例 1.6.7 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续,在 $(0,3)$ 内有二阶导数,且

$$\boxed{2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3),}$$

证明:(1)存在 $\eta\in(0,2)$,使得 $f(\eta)=f(0)$;(2)存在 $\xi\in(0,3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(\alpha)$

0 η 2 α 3

$f'(m)=0$ $f(\alpha)=f(0)$

$f'(n)=0$

$f''(\xi)=0$

证明 (1) 设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(0\leqslant x\leqslant 2)$,则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=F(2)-F(0)$.

根据拉格朗日中值定理可知,存在 $\eta\in(0,2)$,使 $F(2)-F(0)=2F'(\eta)=2f(\eta)$,即

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(\eta),$$

由题设 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f(0)$,从而 $f(\eta)=f(0)$.

(2)由于 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上连续,则其在 $[2,3]$ 上必有最大值 M 和最小值 m,于是

$$m\leqslant f(2)\leqslant M,\quad m\leqslant f(3)\leqslant M,$$

故

$$m\leqslant\frac{f(2)+f(3)}{2}\leqslant M.$$

根据连续函数的介值定理可知,存在 $\tau\in[2,3]$,使 $f(\tau)=\frac{f(2)+f(3)}{2}$. 由题设,$\frac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$,故 $f(\tau)=f(0)$,由(1)的结果可知 $f(0)=f(\eta)=f(\tau)$,且 $0<\eta<\tau\leqslant 3$. 根据罗尔定理可知,存在 $\xi_1\in(0,\eta)$,$\xi_2\in(\eta,\tau)$,使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,从而存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$,使得 $f''(\xi)=0$.

3. 费马定理的使用

证明某点导数为 0 除了构造辅助函数使用罗尔定理外,切记不可忘记还有定理 5(费马定理),使用费马定理只需说明可导函数的最值在区间内部取到,这类问题的题目往往带有不等式关系的条件(因为最值就是通过不等式关系体现的).

例 1.6.8 （导数零点定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明当 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证明 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow \text{存在 } \xi_1>0, \text{在 } (a,a+\xi_1) \text{ 内}, f(x)>f(a),$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow \text{存在 } \xi_2>0, \text{在 } (b-\xi_2,b) \text{ 内}, f(x)>f(b).$$

故 $f(a)$ 与 $f(b)$ 均不是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内取得最大值，根据费马定理可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

4. 拉格朗日中值定理的使用

$$f'(b) < \overset{f'(\xi)}{\overset{\parallel}{\frac{f(a)-f(b)}{a-b}}} < f'(a)$$

例 1.6.9 设 $a>b>0$，$n>1$，证明：$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n<na^{n-1}(a-b)$.

证明 设 $f(x)=x^n$，显然 $f(x)$ 在区间 $[b,a]$ 上连续，在 (b,a) 内可导，即 $f(x)$ 在区间 $[b,a]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是得

$$f(a)-f(b)=f'(\xi)(a-b), \xi\in(b,a),$$

由于 $f'(x)=nx^{n-1}$，因此上式即为

$$a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b),$$

又由 $0<b<\xi<a$，$n>1$，有

$$nb^{n-1}(a-b)<a^n-b^n=n\xi^{n-1}(a-b)<na^{n-1}(a-b).$$

例 1.6.10 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(1)=3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi)$.

证明 注意到 $3x^2 f(x)+x^3 f'(x)$ 是 $x^3 f(x)$ 的导函数，故令 $F(x)=x^3 f(x)$，易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是得

$$F(1)-F(0)=F'(\xi), \xi\in(0,1),$$

即

$$f(1)=3\xi^2 f(\xi)+\xi^3 f'(\xi).$$

例 1.6.11 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明存在不同的 $\xi_1,\xi_2\in(0,1)$，使得 $\frac{1}{f'(\xi_1)}+\frac{1}{f'(\xi_2)}=2$.

证明 用 ξ 将 $[0,1]$ 划分为 $[0,\xi]$，$[\xi,1]$. 在这两个区间上分别对 $f(x)$ 使用拉格朗日中值定理，得

$$f(\xi)-f(0)=f'(\xi_1)(\xi-0)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_1)}=\frac{\xi}{f(\xi)}, \xi_1\in(0,\xi),$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\xi_2)(1-\xi)\Rightarrow\frac{1}{f'(\xi_2)}=\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}, \xi_2\in(\xi,1),$$

与欲证等式比较，只需证 $\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2$ 即可，于是可取 $f(\xi)=\frac{1}{2}$，则

$$\frac{\xi}{f(\xi)}+\frac{1-\xi}{1-f(\xi)}=2(\xi+1-\xi)=2,$$

命题得证.

【注】 这种反推思想值得借鉴.

5. 柯西中值定理的使用

例 1.6.12 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$.

证明 因为 $f(x)$与 $g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0(0<a<x<b)$，即 $f(x)$与$g(x)=\ln x$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

即

$$-F(-a) = -\int_0^{-a} \qquad F(a)$$

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

$$a^3\cdot F'''(\eta)=3\underbrace{\int_{-a}^{0}}_{}+\underbrace{\int_0^a}_{}=3(F(a)-F(-a))$$

6. 泰勒公式的使用

$F(0)=0$

例 1.6.13 设 $f(x)$在区间$[-a,a](a>0)$上具有二阶连续导数，$f(0)=0$.

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$

(1)写出 $f(x)$的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；$\to f(x)=\underset{=0}{f(0)}+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$.

(2) 证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $\boxed{a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)dx}$.

$f(0)=0$ $\Updownarrow$ $F(0)=0$

(1)**解** 对任意的 $x\in[-a,a]$，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2$，$\xi$ 介于 x 与 0 之间.

(2) **证明** $\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_{-a}^{a}f'(0)xdx+\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx.$

因为 $f''(x)$在$[-a,a]$上连续，由最值定理：$m\leqslant f''(x)\leqslant M$，$x\in[-a,a]$，其中 m,M 分别是 $f''(x)$在$[-a,a]$上的最小值和最大值，有

要证：$\frac{a^3}{3}\cdot F'''(\eta)=F(a)-F(-a)$

$$mx^2\leqslant f''(\xi)x^2\leqslant Mx^2,$$

$$\frac{2}{3}ma^3=m\int_{-a}^{a}x^2dx\leqslant\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx\leqslant M\int_{-a}^{a}x^2dx=\frac{2}{3}Ma^3,$$

$$\frac{a^3}{3}\cdot m\leqslant\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}f''(\xi)x^2dx=\int_{-a}^{a}f(x)dx\leqslant\frac{a^3}{3}\cdot M,$$

$F(a)=\cancel{F(0)}+\cancel{F'(0)\cdot a}+\frac{F''(0)}{2}\cdot a^2+\frac{F'''(\eta)}{6}a^3$

$$m\leqslant\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx\leqslant M,$$

由介值定理知，存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a}f(x)dx$，得证.

$F(-a)=\cancel{F(0)}+\cancel{F'(0)(-a)}+\frac{F''(0)}{2}\cdot(-a)^2+\frac{F'''(?)}{6}(-a)^3$ $\downarrow$ η

基础习题精练

习 题

1.6.1 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$，则 $f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$的大小顺序为（　　）.

(A)$f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$ (B)$f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

无穷级数

(一) 关于 n^p 和 $\ln^p n$ 的感觉

① p-级数，关于 $\ln n$ 和 n 的级别问题

$\sum \frac{1}{n}$ d.(发散)　　$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p>1)$ c.　　$\sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{1}{n^p}$ $(p<1)$ d.

$\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(\forall \varepsilon>0)$ $(x\to+\infty)$

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ c.　　$\sum \frac{\ln n}{n^{1+\varepsilon}}$ c.

$\sum \frac{\ln^k n}{n^2}$ $(k=1000, 10000)$. c.

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n}$ d.　　$\sum \frac{1}{n\ln^{1+\varepsilon} n}$ c.

e.g. $\ln\ln x = o((\ln x)^{\varepsilon})$,

$\rightsquigarrow$ $\sum \frac{1}{n\ln n\cdot\ln(\ln n)}$ d.

正常的例子:

$\sum \frac{n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n\ln n}{n^2+1}$ d.　　$\sum \frac{n+1}{n^2\ln n} \sim \sum \frac{1}{n\ln n}$ d.

② 等价量判别法

若 $b_n \geq 0$, $a_n>0$, $\forall n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = c$ (正常数).

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ 和 $\sum b_n$ 同 c./d.

e.g. $\sum \frac{n}{n^2+1}$, $a_n = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}$

$\sum \frac{1}{2n}$ d. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ d.

e.g. $\sum \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ c.

$\ln n = o(n^{\varepsilon})$ $(n\to+\infty)$, $\forall\varepsilon>0$ 成立.

取 $\varepsilon = \frac{3}{14}$. $a_n \leq \frac{n^{\frac{3}{14}}}{n^{\frac{3}{2}}}$

判别法对非正项级数不成立!

反例 $\sum \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)} = \sum a_n$

$b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} = \left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) \to 1 \ (n \to +\infty)$

$\Rightarrow a_n \sim b_n.\quad \sum a_n \sim \sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\ \ c.$

但：$\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum \frac{1}{n} = \sum b_n + \sum \frac{1}{n}\ \ d.$

不对.

e.g. (1) $\sum \frac{1}{n^p} \begin{cases} p>1, & c \\ p\le 1, & d \end{cases}$. (2) $\sum \frac{1}{n(\ln n)^p} \begin{cases} p>1, & c. \\ p\le 1, & d \end{cases}$

(3) $\sum \frac{1}{n\cdot \ln n (\ln\ln n)^p} \begin{cases} p>1. & c \\ p\le 1. & d. \end{cases}$

e.g. (1) $\sum \frac{1}{\underline{n^{\ln r}}} \begin{cases} r>e \\ r\le e \end{cases}$

$n^{\ln r} = r^{\ln n}$ (换底公式)

(2) $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$

$\ln\ln\ln n \le 1$ (有限项)

$\ln\ln\ln n > 1.\ c$

$\Rightarrow c.$

(3) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}\ d.\quad \frac{1}{(\ln n)^{\infty}} \sim \frac{1}{n}\ (d.)$

总结：① 换底

② 次数带n，看成有限/无限两部分

例 16.9 下列级数中发散的是(D).

(A) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}\ c.$ (B) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}\ c.$

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\ln n}$ $n-\ln n \geq \frac{n}{1000}$ c. (D) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$ d.

【解】应选(D). 高阶无穷小只能乘除，不能加减

初值 x_0 的选取无关.

例 16.3 判别下列级数的敛散性：

指数函数 $> n^p$.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n}$； c. (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n}$； d.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx$； (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-9\cos n}{n\sqrt{5n+3}}$. 有限 $\sim \frac{2n-9 \text{ or } 2n+9}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{1/2}}\ d.$

1.14.2 判别级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 的敛散性.

1.14.3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，试证： → 和 $\frac{1}{n^p}$ 比

(1)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛； $u_n\sim\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$

(2)若 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，且 u_n 单调减少，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(3)若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛； → $\frac{1}{n^{2+2\varepsilon}}$

(4)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 收敛. → $\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}$

e.g. (1) $\sum\frac{1}{\ln(n!)}$ $\quad \ln(n!)=\ln1+\cdots+\ln n\leq n\ln n$

$\Rightarrow \sum\frac{1}{\ln(n!)}\geq\sum\frac{1}{n\ln n}$ d.

(2) $\sum\frac{\ln(n!)}{n^p}\leq\sum\frac{n\ln n}{n^p}=\sum\frac{\ln n}{n^{p-1}}\Rightarrow p>2$ c.

$\ln n!>\frac{n}{1000}\Rightarrow\sum\frac{\ln n!}{n^p}>\sum\frac{\frac{n}{1000}}{n^p}\sim\frac{1}{n^{p-1}}$ $\quad p\leq2$, d.

(3) $\sum\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln^2k}{n^p}\leq\sum\frac{n\ln^2n}{n^p}\sim\frac{\ln^2n}{n^{p-1}}\sim\frac{1}{n^{p-1}}$ $\quad p>2$. c.

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n>N,\ \ln^2n>\frac{n}{1000}\Rightarrow p\leq2$, d.

(4) $\sum\frac{1}{n^2-\ln n}$ c. $\quad$ 放缩 $\ln e^n\sim n$

(5) $\sum\frac{\ln(e^n+n^2)}{\underbrace{\sqrt[4]{n^8+n^2+1}}_{\sim n^2}\cdot\underbrace{\ln^2(n+1)}_{\sim\ln^2n}}\sim\sum\frac{n}{n^2\ln^2n}\sim\sum\frac{1}{n\ln^2n}$ c.

额外的变形：对抽象的 a_n 进行操作. $\quad$ 前提 $a_n>0$!

已知 $\sum a_n$ 发散 → 假设 $a_n=\frac{1}{n}$

(1) $\sum\frac{a_n}{1+a_n}$ d.

过程 若 a_n 无界：$\frac{a_n}{1+a_n}\to1\ (n\to\infty)\Rightarrow$ d.

若 a_n 有界：$a_n\leq M$，$\frac{a_n}{1+a_n}\geq\frac{a_n}{M+1}\Rightarrow$ d.

(2) $\sum\frac{a_n}{1+na_n}=\sum\frac{1}{\frac{1}{a_n}+n}$ d.

e.g. $a_n=\begin{cases}1, & n=m^2\\ \frac{1}{n^2}, & 其它\end{cases}\Rightarrow\sum a_n$ d.

$$\text{但}\sum\frac{a_n}{1+na_n}<\sum_{n=m^2}\frac{1}{1+n}+\sum_{\text{其它}}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}}\sim\sum\frac{2}{n^2}\ \ c.$$

$$\sum\frac{1}{1+m^2}\qquad\sum\frac{1}{n^2+n}$$

(3) $\sum\frac{a_n}{1+n^2a_n}\le\sum\frac{a_n}{n^2a_n}=\sum\frac{1}{n^2}$, c.

(4) $\sum\frac{a_n}{1+a_n^2}$ d.

换底

$$\boxed{a^{\ln b}=b^{\ln a}}$$

习题：(1) $\sum\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\sum\frac{1}{n^{\ln\ln n}}$ c.

(2) $\sum\frac{1}{(\ln n)^n}$ d.

(3) $\sum\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ $\begin{cases}\frac{n^3(\sqrt{2}-1)^n}{3^n}\sim\frac{(\sqrt{2}-1)^n}{3^n}\\ \frac{n^3(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}\sim\frac{(\sqrt{2}+1)^n}{3^n}\end{cases}$ c.

(4) $\sum\frac{(\ln\ln n)^{100}}{\underbrace{\ln n\cdot\ln n!}_{\le n\ln^2 n}}\sim\sum\frac{1}{\ln n\cdot\ln n!}$ c.

③ 柯西判别法 和 达朗贝尔判别法 (服务于某些 $n!$ 或 $(\cdot)^n$)

正项 $\sum a_n$.

· $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$. $\rho<1\Rightarrow$ c. $\rho>1\Rightarrow$ d.
$\rho=1\Rightarrow$ 不定.

· $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. $l<1\Rightarrow$ c. $l>1\Rightarrow$ d.
$l=1\Rightarrow$ 不定.

柯西强于达朗贝尔.

e.g. $\sum\frac{1}{n!}$ c. $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}<1\right)$

$\sum\frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n}\Rightarrow\sqrt[n]{a_n}=\frac{x}{1+\frac{1}{n}}<1\ (0<x<1)$

$\Rightarrow 0<x<1$: c. $x>1$: d.

$x=1:\sum\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\sim\sum\frac{1}{e}$ $\quad(1+\frac{1}{n})^n\to e\ (n\to\infty)$. d.

$\sum \frac{1+(-1)^n}{n}\ln^n x \quad \sqrt[n]{a_n} = |\ln x| \frac{\sqrt[n]{1+(-1)^n}}{\sqrt[n]{n}} \longrightarrow |\ln x| \ (n\to\infty)$

(奇数项为0，不能用达朗贝尔).

e.g. $\sum \frac{6^n}{5^n+7^n} \rightsquigarrow \sqrt[n]{a_n} = \frac{6}{\sqrt[n]{7^n+5^n}}$

引理：$a>b>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}} = 1$

$\Leftarrow e^{\ln\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^n\right)^{\frac{1}{n}}} \sim e^{\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^n} \to e^0 = 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \to \frac{6}{7} < 1 \quad$ C.

5月23日 回顾

1. $\sum \frac{\ln\left(1+\boxed{\frac{(3+(-1)^n)\arctan n}{n}}\right)}{\underbrace{\ln^2 n - \ln\ln n}_{\sim \ln^2 n}}$ $\quad \to 0 \quad \sim \frac{(3+(-1)^n)\overset{(有界)}{\arctan n}}{n} \sim \frac{1}{n}$

整体 $\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

2. $\sum \boxed{\frac{\ln(1+\overset{<n}{\ln n})}{\underbrace{\sqrt[3]{n^3-2}}_{n}\cdot\underbrace{\ln^3(n+2)}_{\ln^3 n}}}$ $\rightsquigarrow < \ln(1+n) \sim \ln n$

$\sim \frac{1}{n\ln^2 n}$. C.

3. $\sum \frac{\sqrt{n^{100}+1}}{2^n} \sim n^{50}$ C.

指数函数

4. $\sum \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$

换底. $= \frac{1}{n^{\ln\ln\ln n}}$ 有限项后成为 $\frac{1}{n^{1+?}}$, C.

$\oslash^{\ln \bullet} = \bullet^{\ln \oslash}$

补充：① 关于 $n, \ln n$ ($n^k, \ln^k n$) 的感觉

② 关于指数函数的感觉：$a^n \gg n^b$.

③ 关于 $n!$ 和 a^n：$n! \gg a^n$

④ 关于 n^n 和 $n!$：$n^n > n!$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$：令 $a_n = \frac{n!}{n^n}$，证 $\sum a_n$ 收敛 ($\Rightarrow a_n \to 0$).

柯西：$\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < 1 \ (n\to\infty)$.

$\Rightarrow n^n \gg n!$

但是 $(n!)^2 \gg n^n$ (同理可证)

总结：$(n!)^2 \gg n^n \gg n! \gg a^n \gg n^p \gg \ln^p n$.

(二) 交错级数

· Leibniz 型级数. $\sum u_n$

3个条件: (1) $u_n=(-1)^n b_n$ 或 $(-1)^{n+1} b_n$, $b_n>0$.

(2) b_n 单调递减 $\Big\}$ $b_n \searrow 0$.

(3) $b_n \to 0 \quad (n\to\infty)$

e.g. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ c. $\quad \sum \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ c. $\quad \sum \frac{(-1)^n}{\ln n}$ c.

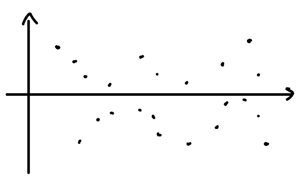
· 绝对收敛

· $\sum |u_n|$ c. $\Rightarrow \sum u_n$ c.

· $\sum |u_n|$ c. 称 $\sum u_n$ 绝对收敛 (a.c.)

$\sum u_n$ c. 但 $\sum |u_n|$ d. 称 $\sum u_n$ 条件收敛 (d.c.)

· 级数的正负分解 (不重要)



$$\begin{cases} a_n^+ = \max\{a_n, 0\} \geq 0 \\ a_n^- = -\min\{a_n, 0\} = \begin{cases} -a_n, & a_n<0 \\ 0, & a_n \geq 0 \end{cases} \rightsquigarrow a_n^- \geq 0 . \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sum a_n = \underbrace{\sum a_n^+}_{\geq 0} - \underbrace{\sum a_n^-}_{\geq 0} \qquad \begin{cases} \sum a_n \text{ a.c.} \Rightarrow \sum a_n^+ ,\ \sum a_n^- \text{ c.} \\ \sum a_n \text{ d.c.} \Rightarrow \sum a_n^+ \text{ d},\ \sum a_n^- \text{ d.} \end{cases}$$

e.g. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{d.c.}} + \sum \frac{1}{n}$. d.

(三) Abel-Dirichlet 判别法

Abel判别法: $\sum \underset{\overset{\uparrow}{\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}}}{a_n}$ 收敛, $\underset{\overset{\uparrow}{M}}{\{b_n\}}$ 单调有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛.

Dirichlet判别法: $\left.\begin{array}{l}\sum a_n:\ S_n\text{有界} \quad \text{e.g. } \pm1,\ \sin n,\ \cos n. \\ \{b_n\}\text{单调收敛于}0\ (b_n\searrow 0)\end{array}\right\}\Rightarrow \sum a_nb_n$收敛.

(Dirichlet 比 Abel 强).

例3: (1) $\sum a_n$, c. $\Rightarrow \sum \frac{na_n}{n+1}$ c.

Abel, $\frac{n}{n+1}$单调有界.

(2) $\sum a_n$. c, $\Rightarrow \sum \frac{a_n}{n^\sigma}$ $(\forall\sigma>0)$ c.

习题: (1) $\sum (-1)^n\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[3]{n+1}}{\sqrt{n}+2}}_{\searrow 0}$ c.

(2) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}}$ c.

$=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{2n}}=\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1-\frac{(-1)^n}{2n}}{(1+\frac{(-1)^n}{2n})(1-\frac{(-1)^n}{2n})}$

$=\sum\underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\text{d.c.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}}_{\text{单调有界}}-\sum\overbrace{\frac{1}{2n^{3/2}}}^{\text{c.}}\cdot\underbrace{\frac{1}{1-\frac{1}{4n^2}}}_{\text{单调有界}}$

(3) $\sum\frac{\cos n}{n}$ c.

$\sum\cos n$ 有界. Dirichlet

(4) $\sum(-1)^n\cdot\frac{\sin^2 n}{n}$ c.

找反例 = 找$(-1)^n$.

① 若 $\sum\limits_{n=1} u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}|u_n|$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}\frac{1}{n}$ 发散).

① 升次数:

e.g. $u_n\to u_n^2$.

$u_n\to u_n\cdot u_{n+1}$

$u_n\to u_{n-1}\cdot u_n\cdot u_{n+1}$

② 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\begin{cases}u_n\geqslant 0\text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2\text{ 收敛}(\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0, \text{从某项起}, u_n<1, u_n^2<u_n), \\ u_n\text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2\text{ 不定(反例}: \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\text{ 收敛,但}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ 发散}).\end{cases}$

$a_n\geqslant 0\Rightarrow$ c.

否则找反例

③ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\begin{cases}u_n\geqslant 0\text{ 时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}\text{ 收敛}\left(u_n\cdot u_{n+1}\leqslant\frac{u_n^2+u_{n+1}^2}{2}\right), \\ u_n\text{ 任意时}, \sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}\text{ 不定(反例}: u_n=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}, \\ u_nu_{n+1}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\ (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=-\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \\ \text{级数发散}).\end{cases}$

④ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^nu_n$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散).

⑤ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$ 不定(反例: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散).

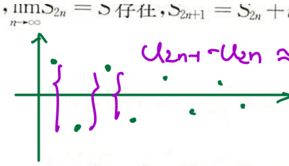
$\Downarrow$

$\sum\frac{u_n}{n}$ c.

$u_n\geqslant 0$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 均收敛,

$\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n})$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$ 存在, $S_{2n+1}=S_{2n}+u_{2n+1}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=$

$S+\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=S$, 即可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.)



$u_{2n-1}-u_{2n}\approx 2$倍绝对值.

⑧ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 不定.

(四) 收敛域. 收敛半径.

函数项: $\sum a_n(x-x_0)^n$, $x=x_0$时为0. (无论a_n为何).

① a_n收敛得好, $|x-x_0|$可以较大, 也能保证$\sum a_n(x-x_0)^n$ c.

② 反之, $|x-x_0|$只能较小.

收敛半径 $\rho = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$

例 16.14 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n x^{2n+1}$ 的收敛域.

缺项: 不要直接计算a_n的比值.

【解】 此级数缺少偶次幂的项. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}x^{2n+3}}{3^n x^{2n+1}}\right| = 3x^2,$$

采用整体法、比值判别法.

所以当 $3x^2 < 1$ 即 $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $3x^2 > 1$ 即 $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数发散. 故级数的收敛半径为 $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 当 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, 级数成为 $\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3}}$, 显然发散.

因此, 幂级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

一阶常微分方程

(一) 恰当方程

形如 $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \iff \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$，$Q \neq 0$.

且 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \rightsquigarrow$ 恰当方程 (exact equation)

问题：一般的 $P\,dx + Q\,dy = 0$ 不能直接积分.

因为 $\int P\,dx$ 中 y 与 x 有关.

但是，恰当方程可以直接积.

例：1. $(3x^2-1)\,dx + (2x+1)\,dy = 0$

$P = 3x^2 - 1$，$Q = 2x+1$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2 \Rightarrow$ 不恰当.

2. $(x+2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0$

$\dfrac{\partial (x+2y)}{\partial y} = 2 = \dfrac{\partial (2x+y)}{\partial x} \Rightarrow$ 恰当

直接积：$\int (x+2y)\,dx + \int (2x+y)\,dy = C$

$$= \underbrace{\int x\,dx}_{\frac{x^2}{2}} + \underbrace{\underbrace{\int \boxed{2y\,dx}}_{2xy} + \underbrace{\int \boxed{2x\,dy}}_{2yx}}_{\text{全微分}} + \underbrace{\int y\,dy}_{\frac{y^2}{2}}$$

$\Phi(x,y)$ 的全微分 $= \boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy}$

<u>原理</u> $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

$\Rightarrow \int P(x,y)dx+\int Q(x,y)dy=C$

比较：希望寻找 $\Phi(x,y)$，使得 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Phi}{\partial y}dy=Pdx+Qdy$

$\rightsquigarrow$ 希望 $\frac{\partial\Phi}{\partial x}=P$，$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=Q$

$\Rightarrow$ 必要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)$$

例：3. $(t^2+1)\cos u\cdot du+2t\sin u\cdot dt=0$

$P=(t^2+1)\cos u$，$Q=2t\sin u$

$\frac{\partial P}{\partial t}=2t\cos u$，$\frac{\partial Q}{\partial u}=2t\cos u$ $\Rightarrow$ 恰当.

$$\Rightarrow \underbrace{\int t^2\cos u\,du}_{t^2\sin u}+\underbrace{\int \cos u\,du}_{=\sin u}+\underbrace{\int 2t\sin u\cdot dt}_{t^2\sin u}=C$$

全微分

$\Rightarrow t^2\sin u+\sin u=C$. 通解.

4. $(ye^x+2e^x+y^2)dx+(e^x+2xy)dy=0$

$P=ye^x+2e^x+y^2$，$Q=e^x+2xy$

$\frac{\partial P}{\partial y}=e^x+2y$，$\frac{\partial Q}{\partial x}=e^x+2y$. $\Rightarrow$ 恰当.

$$\underbrace{\int 2e^x dx}_{2e^x}+\underbrace{\int (ye^x+y^2)dx}_{ye^x+y^2x+\cancel{\varphi(y)}}+\underbrace{\int (e^x+2xy)dy}_{e^xy+xy^2+\cancel{\psi(x)}}=0$$

$ye^x+y^2x+\cancel{\varphi(y)}=e^xy+xy^2+\cancel{\psi(x)}$

$\Rightarrow 2e^x+xy^2+ye^x=C$. 通解.

5. $x f(x^2+y^2)\,dx + y f(x^2+y^2)\,dy = 0$ f 连续可微

$$\left.\begin{aligned} P &= x f(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 2xyf' \\ Q &= y f(x^2+y^2) \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xyf' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{全微分}$$

$$\int \underbrace{x f(x^2+y^2)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial x}} dx + \int \underbrace{y f(x^2+y^2)}_{\frac{\partial \Phi}{\partial y}} dy = C$$

$\Rightarrow \Phi = (\int f)(x^2+y^2) = F(x^2+y^2)$

$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(t+y^2)\,dt$

$F' = f$.

(二) 可分离 x 和 y

如果 dx 侧：只有 x，dy 侧：只有 y $\Rightarrow$ 可直接积。

例：1. $y' = \dfrac{x^2}{y}$ $(y \neq 0)$

$$\Rightarrow y\,dy = x^2\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{3} + C$$

2. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 \sin x = 0$

① $y \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{y^2} + \sin x \cdot dx = 0$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{y} - \cos x + C = 0$ 通解

② $y = 0$ 也是解. 特解

3. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + x + y^2 + xy^2 = (1+x) + y^2(1+x) = (1+y^2)(1+x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{1+y^2} = (1+x)\,dx$$

$$\Rightarrow \arctan y = x + \frac{x^2}{2} + C$$

初值问题：

1. $xdx+ye^{-x}dy=0$ ，$y(0)=1$

$xe^{x}dx+ydy=0$

$\Rightarrow (x-1)e^{x}+\frac{y^2}{2}=C$ 通解.

$\int xe^{x}dx=\int x\,de^{x}=xe^{x}-\int e^{x}dx$

$=xe^{x}-e^{x}$

代入 $y(0)=1$

$\Rightarrow -1+\frac{1}{2}=C=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow (x-1)e^{x}+\frac{y^2}{2}=-\frac{1}{2}$ 特解

2. $\frac{dy}{dx}=1-y^2$

① $\frac{dy}{1-y^2}=dx$ ，$y\neq\pm1$

$\int\frac{dy}{1-y^2}=\int\frac{dy}{(1-y)(1+y)}=\int-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}\right)dy$

$=-\frac{1}{2}\left(\ln|y-1|-\ln|y+1|\right)=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=\int dx=x+C$

$\Rightarrow \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|+2x=C.$

② $y=\pm1$ 也是解

本题函数积分：$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$ ，P, Q 多项式.

第一步：将 Q 因式分解成
- 一些一次式之积. $\xrightarrow{\text{分开}}$ $\ln|\cdots|$
- 一些无实根的二次式.

(三) "线性" 方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ ⟵ 系数是 x 的函数.

只有一种标准解法：凑积分因子：$e^{\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow e^{\int p}y' + e^{\int p}py = qe^{\int p}$$

$$\Rightarrow (e^{\int p}y)' = qe^{\int p}$$ 可直接积分（关于x）.

关于x的导数

$$\Rightarrow e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C$$

$$\Rightarrow y = e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

例：1. $y' + 2y = xe^{-x}$，凑 $e^{\int 2\cdot dx} = e^{2x}$

$$\Rightarrow e^{2x}(y'+2y) = xe^{-x}\cdot e^{2x}$$

$$\Rightarrow (e^{2x}\cdot y)' = xe^{x}$$

$$\Rightarrow e^{2x}\cdot y = \int xe^{x}dx + C$$

$$\Rightarrow y = Ce^{-2x} + (x-1)e^{-x}$$

2. $x\frac{dy}{dx} + 2y = \sin x$，$y(\pi) = \frac{1}{\pi}$.

$$\Rightarrow y' + \frac{2}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

$$\Rightarrow (e^{\int\frac{2}{x}}y)' = \frac{\sin x}{x}\cdot e^{\int\frac{2}{x}dx} = x\sin x$$

$$\Rightarrow x^2y = \int x\sin x\,dx + C = -x\cos x + \sin x + C$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{x}\cos x + \frac{\sin x}{x^2} + \frac{C}{x^2} \quad (x\neq 0)$$

（四）"拟线性"方程

可通过某种代换化为线性.

例：1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2y}$ 关于y的二次降一次：代$z=y^2$.

令$y^2=z$. $\frac{dz}{dx} = \frac{dy^2}{dx} = 2yy' = 2y\cdot\frac{x^2+y^2}{2y} = x^2+z$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = z+x^2$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y^2}$ ← −1次. 需要1次. 取倒数

$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{x+y^2}{y} = \frac{1}{y}x+y$ 关于x线性.

3. $3xy^2\frac{dy}{dx}+y^3+x^3=0$. 令$z=y^3$.

$\frac{dz}{dx} = 3y^2\cdot y' = -\frac{y^3}{x}-x^2 = -\frac{z}{x}-x^2$. 关于z线性.

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}+x\tan y$ 将z代为y的三角函数

令$z=\sin y$,

$\frac{dz}{dx} = \frac{d\sin y}{dx} = \cos y\cdot\frac{dy}{dx} = 1+x\sin y = 1+xz$ 关于z线性.

或$z=\cos y$,

$\frac{dz}{dx} = \frac{d\cos y}{dx} = -\sin y\cdot\frac{dy}{dx} = -\tan y - x\cdot\frac{\sin^2 y}{\cos y}$ (X).

(三) $y' = f(ax+by+c)$

例：1. $y' = \frac{2y-x}{2x-y}$ 上下齐次

令$y=ux=u(x)\cdot x$ (u不是常数, u是关于x的函数!)

$$\Rightarrow y' = u'x + u = \frac{du}{dx}\cdot x + u = \frac{2ux - x}{2x - ux} = \frac{2u-1}{2-u}$$

$$\Rightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{2u-1-2u+u^2}{2-u} = \frac{u^2-1}{2-u}$$

$$\Rightarrow \frac{2-u}{u^2-1}\,du = \frac{dx}{x}$$ ← 可分离变量.

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{1-u}{1+u}\right| - \frac{1}{2}\ln|u^2-1| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow \ln\left|\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 \Big/ \frac{y^2-x^2}{x^2}\right| = \ln x^2 + C$$

2. $y' = \dfrac{2y - x + 5}{2x - y - 4}$ 直接令 $y=ux$ 会无效.

(会去掉常数项)

方法: $\begin{cases} 2y - x + 5 = 0 \\ 2x - y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

令 $u = x-1,\ v = y+2$.

$$\Rightarrow y' = \frac{2v-u}{2u-v} = \frac{dv}{du}$$

练习: 将方程处理成标准的形式.

1. $y' = \cos(x-y)$

$u = x - y$. $\dfrac{du}{dx} = 1 - y' = 1 - \cos u$

$$\Rightarrow \frac{du}{1-\cos u} = dx \quad (\cos u \neq 1)$$ ← 验证: $\cos u = 1$ 确实是解

$$\Rightarrow \frac{d(\frac{u}{2})}{\sin^2\frac{u}{2}} = dx \quad (\cos u = 1 - 2\sin^2\frac{u}{2})$$

$$\Rightarrow -\cot\frac{u}{2} = x + C$$

$$\Rightarrow \cot\frac{x-y}{2} + x + C = 0$$ 通解

2. $(3uv+v^2)\,du+(u^2+uv)\,dv=0$

$$\downarrow \frac{\partial}{\partial v} \qquad \downarrow \frac{\partial}{\partial u}$$

$$3u+2v \qquad 2u+v$$

同乘 $u \Rightarrow (3u^2v+uv^2)\,du+(u^3+u^2v)\,dv=0$

$$\left.\begin{aligned} P=3u^2v+uv^2 &\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial v}=3u^2+2uv \\ Q=u^3+u^2v &\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial u}=3u^2+2uv. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{恰当}$$

$$\Rightarrow \int \underbrace{(3u^2v+uv^2)}\,du+\int \underbrace{(u^3+u^2v)}\,dv=C$$

$$u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2+\cancel{\varphi(v)}=u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2+\cancel{\varphi(u)}$$

$\Rightarrow u^3v+\frac{1}{2}u^2v^2=C$. 通解.

3. $\dfrac{y\,dy}{x\,dx}=\dfrac{4y^2-2x^2}{x^2+y^2+3}$

LHS $=\dfrac{dy^2}{dx^2}$. 令 $u=y^2$, $v=x^2$.

$\Rightarrow \dfrac{du}{dv}=\dfrac{4u-2v}{u+v+3}$

令 $\begin{cases}4u-2v=0\\ u+v+3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u=-1\\ v=-2\end{cases}$. 令 $\begin{cases}m=u+1\\ n=v+2\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{dm}{dn}=\dfrac{4m-2n}{m+n}$, 令 $m=zn$, z与n有关

$\Rightarrow m'=z'\cdot n+z=\dfrac{4zn-2n}{zn+n}=\dfrac{4z-2}{z+1}$

$\Rightarrow n\cdot\dfrac{dz}{dn}=\dfrac{4z-2-z^2-z}{z+1}=\dfrac{-z^2+3z-2}{z+1}$

$d(z^2-3z+2)=(2z-3)\,dz$

$\Rightarrow \dfrac{z+1}{-(z^2-3z+2)}\,dz=\dfrac{1}{n}\,dn \rightsquigarrow \ln|n|+C=-\displaystyle\int\dfrac{z+1}{z^2-3z+2}\,dz$

$$\| \qquad =-\frac{1}{2}\int\frac{(2z-3)+5}{z^2-3z+2}\,dz$$

$$\frac{z+1}{-(z-2)(z-1)}\,dz$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d(z^2-3z+2)}{z^2-3z+2}-\frac{5}{2}\int\frac{dz}{(z-1)(z-2)}$$

$$-\int\left(\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}\right)dz$$

$$=\ln\frac{(z-1)^2}{|2-z|^3}=\ln|n|+C$$

$$\begin{cases} n=v+2=x^2+2 \\ z=\dfrac{m}{n}=\dfrac{u+1}{v+2}=\dfrac{y^2+1}{x^2+2} \end{cases}$$

$$\ln(x^2+2)+C=\ln(\cdots).$$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y\,dy}{x\,dx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$. 令 $u=y^2$, $v=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dv}=\dfrac{2v+3u-7}{3v+2u-8}$. 设 $\begin{cases}2v+3u-7=0\\3v+2u-8=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}u=1\\v=2\end{cases}$

令 $m=u-1$, $n=v-2$. 则

$\dfrac{dm}{dn}=\dfrac{2n+3m}{2m+3n}$. 令 $m=zn$.

$\Rightarrow$ 分离变量为 $\left(\dfrac{3+2z}{2-2z^2}\right)dz=\dfrac{dn}{n}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|-\dfrac{1}{2}\ln|1-z^2|=\ln n+C$

$\Rightarrow (x^2-y^2-1)^5=C(x^2+y^2-3)$.

一阶微分方程的求解

- 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)$ ← 分离变量
- 能写成 $y'=f(ax+by+c)$
- 能写成 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 能写成 $\frac{1}{y'}=f\left(\frac{x}{y}\right)$

拟线性.

- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)$ ← 线性. 凑 $e^{\int p(x)dx}$
- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$(仅数学一) ← 拟线性

特别说明：伯努利方程

$$y'+p(x)y=q(x)y^m \quad (m\neq 0,1)$$

① $y\neq 0$ 时，$\frac{y'}{y^m}+p(x)y^{1-m}=q(x)$.

令 $z=y^{1-m} \Rightarrow \frac{dz}{dx}=(1-m)y^{-m}\cdot\frac{dy}{dx}$

$=(1-n)q(x)-(1-n)p(x)z$ 关于z线性.

② $y=0$ 也是方程的特解

高阶常微分方程

第一类：求齐次通解

例：$y'''-2y''-3y'+10y=0$ ← 齐次

⟶ 找特征方程

$$\lambda^3-2\lambda^2-3\lambda+10=0$$

$$=\lambda^3+2\lambda^2-4\lambda^2-8\lambda+5\lambda+10$$

$$=\lambda^2(\lambda+2)-4\lambda(\lambda+2)+5(\lambda+2)$$

$$=(\lambda^2-4\lambda+5)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=2+i,\ \lambda_3=2-i$

$\Rightarrow$ 所求通解

$$y=C_1e^{\lambda_1 x}+C_2e^{\lambda_2 x}+C_3e^{\lambda_3 x}$$

$$=C_1e^{-2x}+C_2e^{(2+i)x}+C_3e^{(2-i)x}$$

写成含cosx, sinx的式子

利用 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ （欧拉方程）

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 \overset{\cos x + i\sin x}{e^{ix}} + C_3 \overset{\cos x - i\sin x}{e^{-ix}})$$

$$= C_1 e^{-2x} + e^{2x}(\tilde{C}_2 \cos x + \tilde{C}_3 \sin x)$$ 通解.

总结: ① 写出特征方程, 解特征值 λ_1(k_1重), $\cdots$, λ_n(k_n重) ($\lambda_1,\cdots,\lambda_n$互异)

② 通解 $y = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x \cdot e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_1} \cdot x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}}_{\lambda_1\text{部分}} + \underbrace{\cdots}_{\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{部分}}$

e.g. $\lambda_1 = \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

第二类: 非齐次通解

非齐次通解 = 齐次通解 + 特解 (找特解是主要任务)

例: $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

① 先解齐次 $2y'' - 4y' - 6y = 0$

特征方程 $2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$$

② $e^{\alpha x}(a\sin x + b\cos x)$ 或 $e^{\alpha x} \cdot P(x)$ (P多项式)

判断其中 α 是 n 重左式的特征根.

$\rightsquigarrow$ 若为n重, 则特解形如 $A \cdot x^n \cdot e^{\alpha x}$ (A常数)

e^{2x}中, 2在左侧为0重 $\rightsquigarrow$ 特解 $y = Ae^{2x}$.

③ 解出特解中的待定系数.

$$2y'' = 2 \cdot (2Ae^{2x})' = 8A \cdot e^{2x}$$

$$-4y' = -4 \cdot 2Ae^{2x} = -8Ae^{2x}$$

$$\Rightarrow -6y = -6Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

④ 通解 = 齐次通解 + 特解

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x}.$$

总结：特解的长相.

(1) 右式 $= e^{\alpha x}\cdot P(x)$ ，P为多项式

特解 $= Ax^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$ ． $n=\alpha$在左侧式子中的重数.

$Q(x)$：首一多项式（最高次项系数为1），次数与P相同.

e.g. $P=2x^3+5x^2+3$ ， $Q=x^3+mx^2+nx+r$

或 特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$． $Q(x)$次数与$P(x)$相同.

(2) 右式 $= e^{\alpha x}(m\sin\beta x+n\cos\beta x)$

特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}(a\sin\beta x+b\cos\beta x)$ ， $n=\alpha\pm\beta i$ 在左侧式子中的重数

右式分多项.

习题：1. $y''+2y'=3+4\sin 2x$ ← 每一项分别找特解，再相加.

齐次方程 $y''+2y'=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda=(\lambda+2)\lambda=0$ ， $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-2$.

$\Rightarrow \tilde{y}=C_1+C_2e^{-2x}$ 为通解.

① 3对应特解

$3=3\cdot e^{0x}$， 0为1重根.

$\rightsquigarrow$ 特解 $Ax^1\cdot e^{0x}=Ax$ （$P(x)=3$， $Q(x)=A$）

② $4\sin 2x$对应特解

$4\sin 2x=e^{0x}(4\sin 2x)$． $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ 不是解 $\Rightarrow n=0$

$\rightsquigarrow$ 特解 $x^0\cdot e^{0x}\cdot(m\sin 2x+n\cos 2x)=m\sin 2x+n\cos 2x$

①② $\Rightarrow$ 特解 $y=Ax+m\sin 2x+n\cos 2x$

待定系数法 $A=3/2$ ， $m=n=-1/2$.

通解 $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

2. $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$

特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=i$ ， $\lambda_3=\lambda_4=-i$.

齐次通解 $\tilde{y} = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix}$

右式 $= \sin x = e^{0x} \cdot \sin x$，$\alpha \pm \beta i = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$

i 和 $-i$ 均为二重特征根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{ix}(A\sin x + B\cos x) + x^2 \cdot e^{-ix}(C\sin x + D\cos x)$

……

3. (yyh) $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{3x}\cos x$.

特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\rightsquigarrow$ 齐次通解 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

① 关于 xe^{3x} 的特解

$\alpha = 3$ 为二重根 $\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{3x} \cdot (mx + n) = (mx^3 + nx^2)e^{3x}$

$\Rightarrow y' = 3e^{3x}(mx^3 + nx^2) + (3mx^2 + 2nx) \cdot e^{3x} = e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx)$

$y'' = 3e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx) + e^{3x}(9mx^2 + (6m+6n)x + 2n)$

$\rightsquigarrow y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(9mx^3 + (18m+9n)x^2 + (6m+12n)x + 2n)$

$- 6e^{3x}(3mx^3 + (3n+3m)x^2 + 2nx) + 9e^{3x}(mx^3 + nx^2)$

$= 6mxe^{3x} =$ 右式第一部分 $= xe^{3x}$

$\Rightarrow n = 0$，$m = 1/6$.

$\rightsquigarrow$ 特解 $= \frac{1}{6}x^3 e^{3x}$.

② 关于 $e^{3x}\cos x$ 的特解

$\alpha \pm \beta i = 3 \pm i$ 不是根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^0 \cdot e^{3x} \cdot (A\sin x + B\cos x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x$

$\Rightarrow y'' - 6y' + 9y = 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + 6(-Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x)$

$- (Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) - 6[3(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + (-Ae^{3x}\sin x$

$+ Be^{3x}\cos x)] + 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x)$

$= (9A + 6B - A - 18A - 6B + 9A)e^{3x}\cos x$

$+(9B-6A-B-18B+6A+9B)e^{3x}\sin x$

$= -Ae^{3x}\cos x - Be^{3x}\sin x$

$=$ 右式第二项 $= e^{3x}\cos x \Rightarrow A=-1, B=0.$

最终通解 $y = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \frac{1}{6}x^3e^{3x} - e^{3x}\cos x.$

变形：欧拉方程 （不是 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x\cdot y' + a_n\cdot y = 0$$

只须换一次元，转化为常规形式

换法：

3. 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$（仅数学一）

① 当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$，$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

方程化为 $$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t),$$

即可求解（别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数）.

② 当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$，同理可得.

例：$x^2y''+5xy'+13y=0 \quad (x>0)$

令 $x=e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y'\cdot e^t = xy'$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d(xy')}{dt} = \frac{dx}{dt}\cdot y' + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\cdot x = xy' + x^2y''$

$\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = y''\cdot x$

$\rightsquigarrow$ 原式左侧 $= \frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 13y = 0$

特征方程 $\lambda^2+4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_1=-2+3i,\ \lambda_2=-2-3i$

$\Rightarrow$ 通解 $y = C_1e^{(-2+3i)t} + C_2e^{(-2-3i)t} = C_1x^{-2+3i} + C_2x^{-2-3i}$

$= e^{-2t}(C_1(\cos3t+i\sin3t) + C_2(\cos3t - i\sin3t))$

$= e^{-2t}(\tilde{C}_1\cos3t + \tilde{C}_2\sin3t)$

$= \frac{1}{x^2}(\tilde{C}_1\cos(\ln x^3) + \tilde{C}_2\sin(\ln x^3))$

二 二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二)

若是“y''”,则

1. 能写成 $y''=f(x,y')$ 缺y

① 缺 y,令 $y'=p$,$y''=p'\Rightarrow$ 原方程变为一阶方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

见例 15.9.

2. 能写成 $y''=f(y,y')$ 缺x

① 缺 x,令 $y'=p$,$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$,则原方程变为一阶方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(y,C_1)$,则由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$,分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$;

③ 两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$,即可求得原方程的通解.

差分方程

差分定义：离散版微分

若 $f(x)=y$ 只在 $x_0, x_1, \cdots$ 上定义.

x_k 变到 x_{k+1} 时，$y=f(x)$ 的变化量 $\Delta y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$

$\Rightarrow$ $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ ，$y_k = f(x_k)$ 一阶差分.

完整版本 $\Delta y = \min\limits_{\Delta k>0} \dfrac{y_{k+\Delta k} - y_k}{\Delta k} = y_{k+1} - y_k \quad (\Delta k = 1)$ ，

微分：$y' = \boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0}} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

本质是让 Δx 无穷小（以直代曲误差无穷小）.

二阶差分：$\Delta^2 y_k = \Delta y_{k+1} - \Delta y_k$.

n 阶差分：$\Delta^n y_k = \Delta^{n-1} y_{k+1} - \Delta^{n-1} y_k$.

差分运算法则.

(1) $\Delta C = 0$ （C 常数）

(2) $\Delta (C y_k) = C \Delta y_k$

(3) $\Delta (C_1 y_k \pm C_2 z_k) = C_1 \Delta y_k \pm C_2 \Delta z_k$

(4) $\Delta (y_k \cdot z_k) = y_{k+1} \cdot \Delta z_k + z_k \cdot \Delta y_k = y_k \cdot \Delta z_k + z_{k+1} \cdot \Delta y_k$!

(5) $\Delta \left(\dfrac{y_k}{z_k}\right) = \dfrac{z_k \Delta y_k - y_k \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}} = \dfrac{z_{k+1} \Delta y_k - y_{k+1} \Delta z_k}{z_k \cdot z_{k+1}}$.

例：$\Delta^4 y_x - 6 y_{x+2} + 4 y_{x+1} - y_x + 1 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta^4 y_x &= \Delta^3 y_{x+1} - \Delta^3 y_x \\ &= \Delta^2 y_{x+2} - \Delta^2 y_{x+1} - \Delta^2 y_{x+1} + \Delta^2 y_x \\ &= \Delta y_{x+3} - \Delta y_{x+2} - \Delta y_{x+2} + \Delta y_{x+1} - \Delta y_{x+2} + \Delta y_{x+1} + \Delta y_{x+1} - \Delta y_x\end{aligned}$$

$$= \Delta y_{x+3} - 3\Delta y_{x+2} + 3\Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

$$= y_{x+4} - y_{x+3} - 3(y_{x+3} - y_{x+2}) + 3(y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x)$$

$$= y_{x+4} - 4y_{x+3} + 6y_{x+2} - 4y_{x+1} + y_x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta^4 y_x - 6y_{x+2} + 4y_{x+1} - y_x + 1$$

$$= y_{x+4} - 4y_{x+3} + 1 = 0$$

作变换 $u = x+3 \rightsquigarrow y_{u+1} - 4y_u + 1 = 0$.

结论：高阶一定可以化为低阶.

差分方程通解结构.

如果 $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \cdots, y_x^{(n)}$ 是n阶齐次常系数差分方程

$$a_n \Delta^n y_x + a_{n-1} \Delta^{n-1} y_x + \cdots + a_0 y_x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b_n y_{x+n} + b_{n-1} y_{x+(n-1)} + \cdots + b_1 y_{x+1} + b_0 y_x = 0$$

那么通解为

$$Y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \cdots + C_n y_x^{(n)}.$$

齐次差分方程通解.

① $y_{x+1} + m y_x = 0$

通解 $y_c(x) = C \cdot (-m)^x$.

验证: $y_c(x+1) = (-m) \cdot C \cdot (-m)^x = -m y_c(x)$.

② $y_{x+1} + m y_x = f(x)$

找特解，通解 = 特解 + 齐次通解

(i) $f(x)$ 是 n次多项式 $P_n(x)$

$m \neq -1$: $y_x^* = Q_n(x)$ （系数不是 P_n 的系数）

（n次项不会被消掉）

$m=-1$：n次项会被消掉

$$y_x^* = x\cdot Q_n(x) \quad (\text{提一次})$$

原因：设 $Q_n(x) = B_n x^n + B_{n-1}x^{n-1} + \cdots + B_0$

$$Q_n(x+1) = B_n(x+1)^n + B_{n-1}(x+1)^{n-1} + \cdots + B_0$$

$$= B_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \cdots + C_0 \quad (C_{n-1} \neq B_{n-1})$$

$$\Rightarrow Q_n(x+1) - Q_n(x) = (C_{n-1} - B_{n-1})x^{n-1} + \cdots + C_0 - B_0$$

是一个n-1次多项式

若 $m=-1$，$y_{x+1} + m y_x = y_{x+1} - y_x =$ n-1次多项式 $\neq P_n(x)$.

(所以左式必须补一次).

(ii) $f(x) = d^x \cdot P_n(x)$，$d \neq 0$ 为常数

$m+d \neq 0$，$y_x^* = d^x \cdot Q_n(x)$.

检验：$y_{x+1} = d^{x+1} Q_n(x+1)$

$$\Rightarrow y_{x+1} + m y_x = d\cdot d^x \cdot Q_n(x+1) + m d^x \cdot Q_n(x) = d^x \cdot P_n(x)$$

$$\Rightarrow d\cdot Q_n(x+1) + m\cdot Q_n(x) = P_n(x).$$

(若 $d+m=0$，n次项被消).

$m+d=0$，$y_x^* = x\cdot d^x \cdot Q_n(x)$ (补一次)

(iii) $f(x) = b_1\cos\omega x + b_2 \sin\omega x$ ($\omega \neq 0$，b_1, b_2 不同时 $=0$)

$$D = \begin{vmatrix} m+\cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & m+\cos\omega \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$y_x^* = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x, \quad \alpha, \beta \text{ 待定}.$$

$D=0$，$y_x^* = x(\alpha\cdot\cos\omega x + \beta\sin\omega x)$.

差分方程的例子

Hansen - Samuelson 国民收入分析模型

Y_t - 国民收入，C_t - 消费，I_t - 投资，G_t - 政府支出总额

作为最终差分方程的未知量

$$Y_t = C_t + I_t + G_0$$

方便起见, $G_t = G_0$ 为常数

$$I_t = \beta (C_t - C_{t-1}), \quad \beta > 0.$$

$$Y(0) = Y_0, \quad Y_1 = Y_1$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1}, \quad 0 < \alpha < 1$$

$$\Rightarrow Y_t = \alpha Y_{t-1} + \beta (C_t - C_{t-1}) + G_0$$

$$= \alpha Y_{t-1} + \beta (\alpha Y_{t-1} - \alpha Y_{t-2}) + G_0$$

$$\Rightarrow Y_t - (1+\beta)\alpha Y_{t-1} + \alpha\beta Y_{t-2} - G_0 = 0.$$

二阶常系数非齐次差分方程.

换元法和分部积分法

换元法1：凑微分法

目的：$\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x))+C$

其中F是f的原函数．（原因：链式法则）

$u'(x)dx = d(u(x)) \Rightarrow \int f(u(x))\,du(x)$

例：幂代换

设$F'(u)=f(u)$，$\alpha\neq 0$

$$\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha}\int f(x^\alpha)(\alpha x^{\alpha-1})dx = \frac{1}{\alpha}F(x^\alpha)+C$$

$\alpha=-1$时：

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}dx = -F\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

另：$\int f(\ln x)\frac{dx}{x} = \int f(\ln x)\,d(\ln x) = F(\ln x)+C$.

习题：1. 求$\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}dx = \cos\frac{1}{x}+C$

2. 求$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ $\quad \frac{1}{x^2}$在哪？

$$=\int\frac{x\,dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int\frac{-x}{\sqrt{x^2+1}}d\left(\frac{1}{x}\right) = \int\frac{-1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$\frac{dx}{x^2}=-d\left(\frac{1}{x}\right)$

$$=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right|+C$$

3. 求$\int\frac{dx}{x(1+x^n)} = \int\frac{x^{n-1}}{x^n(1+x^n)}dx = \frac{1}{n}\int\frac{dx^n}{x^n(1+x^n)}$

$$=\frac{1}{n}\int\frac{du}{u(1+u)} = \frac{1}{n}\left(\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\right) = \frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C$$

4. 求$\int\frac{dx}{x\ln x}$

$u=\ln x$，原式$=\ln|\ln x|+C$.

与三角代换的关系.

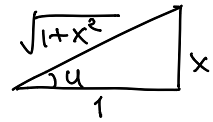
例: $\int (x^2+1)^{-3/2}\, dx$

· 利用 $(\arctan x)' = (1+x^2)^{-1}$

取 $u = \arctan x \ (x = \tan u) \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{\tan^2 u+1}} = \int \cos u\, du = \sin u + C$$

$$= \sin(\arctan x) + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$



· 凑微分法

$$I = \int \frac{dx}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} \underset{令\, u=\frac{1}{x}}{=} \int \frac{u^3 \cdot \overbrace{\frac{du}{-u^2}}^{=dx}}{(1+u^2)^{3/2}} = -\int \frac{u\,du}{(1+u^2)^{3/2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{(1+u^2)^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^{3/2}} \qquad du^2 = 2u\,du = d(u^2+1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{v}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

三角凑微分

(1) $\int f(\sin x)\cos x\, dx = \int f(\sin x)\, d\sin x$

(2) $\int f(\cos x)\sin x\, dx = -\int f(\cos x)\, d\cos x$

(3) $\int f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x} = \int f(\tan x)\sec^2 x\, dx = \int f(\tan x)\, d\tan x.$

(4) $\int f(\cot x)\frac{dx}{\sin^2 x} = \int f(\cot x)\csc^2 x\, dx = -\int f(\cot x)\, d\cot x.$

进阶 $\int f(\tan x)\, dx = \int f(\tan x)\cdot \cos^2 x \cdot \overbrace{\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}dx}}^{d\tan x}$

$$= \int \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\, d\tan x.$$

$f(u) \rightsquigarrow \frac{f(u)}{1+u^2}$

e.g. $I = \int \tan x\, dx$

解一: $I = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C$

解二: $I=\int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,d\tan x = \int \frac{u}{1+u^2}\,du$

$= \frac{1}{2}\int \frac{d(1+u^2)}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln|1+u^2|+C$

$= -\frac{1}{2}\ln|\cos^2 x|+C = -\ln|\cos x|+C$

应用: $\sin^n x$ 和 $\cos^n x$ 的积分.

例1: $I=\int \sin^3 x\,dx$

两种主要方法:

① 分部积分 $I=\int \sin x\cdot(1-\cos^2 x)\,dx = \int (\cos^2 x-1)\,d\cos x$

$= \frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C.$

② 倍角公式 $\sin 3x = 3\sin x-4\sin^3 x.$

$(\sin^3 x = \frac{1}{2}2\sin^2 x\cdot\sin x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x$

$= \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}\cdot\underbrace{2\cos 2x\cdot\sin x}_{\text{积化和差}}$

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x) = \frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x)$

$\Rightarrow I=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$

例2: $I=\int \frac{dx}{\sin^3 x\cdot\cos x}$ ← 此类问题一定可以化为有理分式,求不定积分.

· 凑微分. 化为有理分式

$I=\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x\cos^2 x} = \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}$

$= \int \frac{du}{u^3(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{2u\,du}{u^4(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{dv}{v^2(1-v)}$ $(v=u^2)$

待定系数法: $\frac{1}{v^2(1-v)} = \frac{Av+B}{v^2}+\frac{C}{1-v} = \frac{A}{v}+\frac{B}{v^2}+\frac{C}{1-v}$

$\Rightarrow \frac{1}{1-v} = Av+B+C\cdot\frac{v^2}{1-v}$

· 令 $v \to 0 \Rightarrow B=1$ · 令 $v \to +\infty \Rightarrow A=C=1$

· 令 $v \to 1 \Rightarrow C=1$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{v}+\frac{1}{v^2}+\frac{1}{1-v}\right) dv$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v}{1-v}\right| - \frac{1}{2v} + C = \cdots$$

· 另解：$I = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^3 x\cos x}dx = \int \frac{dx}{\sin x\cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

$$= \int \frac{dx}{\tan x\cdot\cos^2 x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x}$$

$$= \int \frac{d\tan x}{\tan x} + \int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = \ln|\tan x| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C$$

注：还可以

$$I = \int \frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x\cos x}dx = \int \frac{\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x}{\sin^3 x\cos x}dx$$

$$= \int \tan x\, dx + \int \frac{2}{\tan x}dx + \int \frac{1}{\tan x}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 x}-1\right)dx$$

$$= \int \tan x\, dx + \int \frac{1}{\tan x}dx + \int \cot x\cdot \boxed{\frac{dx}{\sin^2 x}} = -d\cot x$$

$$= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\cot^2 x + C.$$

总结：若分子上只有dx，则可以乘某些东西化为$du = (\cdots)dx$.

特别部分：$\sin x$、$\cos x$ 二次式积分.

$$I = \int \frac{dx}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x} \quad (A\neq 0)$$

首先转化为有理分式

$$I = \int \frac{\frac{1}{\sin^2 x}dx}{A\cot^2 x+2B\cot x+C} = -\int \frac{d\cot x}{A\cot^2 x+2B\cot x+C}$$

$$= -\int \frac{dt}{At^2+2Bt+C} = -\frac{1}{A}\int \frac{dt}{(t+\frac{B}{A})^2+\frac{1}{A^2}(AC-B^2)}$$

令 $t_0 = \frac{B}{A}$，$\beta = \frac{1}{A^2}(AC-B^2)$.

① $AC-B^2>0$: $I = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\frac{\cot x+t_0}{\sqrt{\beta}}+C$

② $AC-B^2=0$: $I = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\cot x+t_0}+C$

③ $AC-B^2<0$: $I = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-\beta}}\ln\left|\frac{\cot x+t_0-\sqrt{-\beta}}{\cot x+t_0+\sqrt{-\beta}}\right|+C$

换元法2：代入法 （换元法1的反向用法）

目的： $\int f(x)dx = \int f(x(t))\,x'(t)dt$

$(dx = d(x(t)) = x'(t)dt)$

例： $I = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$ 令 $x = a\tan t$

$\Rightarrow I = \int\frac{dx}{a\sqrt{\tan^2t+1}} = \frac{1}{a}\int\frac{\frac{a\,dt}{\cos^2t}}{\frac{1}{\cos t}} = \int\frac{dt}{\cos t}$

$dx = \frac{a}{\cos^2t}dt$, $1+\tan^2t = \frac{1}{\cos^2t}$

查积分表

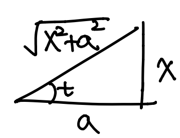
$\Rightarrow I = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$. 恢复为含x的式子.

?

$\tan\frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t}$ （恢复通式子）

$\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1+\sin t}{\cos t}$

$\rightsquigarrow I = \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$ $\left(\tan t = \frac{x}{a}\right)$



$= \ln\left|\frac{1+x/\sqrt{x^2+a^2}}{a/\sqrt{x^2+a^2}}\right|+C$

$= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right|+C$

补充： $\int\frac{dt}{\cos t} = \int\frac{\cos t\,dt}{\cos^2t} = \int\frac{d\sin t}{1-\sin^2t}$

$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|+C$ $\rightarrow$ $= \frac{1-\sin^2t}{(1+\sin t)^2} = \frac{\cos^2t}{(1+\sin t)^2}$

$= \ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$

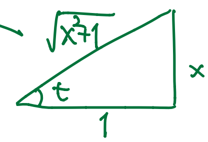
例: $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ (之前: 同乘 x)

令 $x=\tan t$ (去根号)

$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt}{\tan t\cdot\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\sin t}$ ← 比较上方"补充".

$=\int\frac{\sin t\,dt}{1-\cos^2 t}=-\int\frac{d\cos t}{1-\cos^2 t}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right|+C$



$=\ln\left|\frac{x/\sqrt{x^2+1}}{1+1/\sqrt{x^2+1}}\right|+C$

$=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+C.$

例: $I=\int\frac{dx}{x(1+x^n)}$ (之前: 上下同乘 x^{n-1})

令 $x^n=t$ (即 $x=t^{1/n}$). 这样有 $dt=nx^{n-1}dx$

$\Rightarrow I=\int\frac{\frac{1}{n}t^{1/n-1}dt}{t^{1/n}(1+t)}=\frac{1}{n}\int\frac{dt}{t(1+t)}$

$=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C$

$=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

例: $I=\int\frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}}$.

令 $x=\tan t$, 则 $I=\int\cos t\,dt=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

例: $I=\int\sin^3 x\,dx$,

令 $t=\sin x\Rightarrow I=\int t^3\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}d(t^2)$. 令 $v=t^2$

$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int\frac{v\,dv}{\sqrt{1-v}}=\frac{1}{2}\int\frac{1-(1-v)}{\sqrt{1-v}}dv=-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-v}}-\sqrt{1-v}\right)d(1-v)$

$(1-v)^{-1/2}$

$=-(1-v)^{1/2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-v)^{3/2}+C$

其中 $1-u=1-t^2=1-\sin^2 x=\cos^2 x$

$\Rightarrow I=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$.

分部积分法.

公式 $\int u\,dv=uv-\int v\,du$. (没有C).

例: 有些积分不分部无法处理

$$I=\int x\cdot e^x dx$$

尝试: 换元法. 令 $e^x=t$. $dx=d(\ln t)=\frac{1}{t}dt$

$$\Rightarrow I=\int t\cdot\ln t\cdot\frac{1}{t}dt=\int \ln t\,dt$$

($\ln t$ 的原函数: $(t\ln t)'=\ln t+1 \Rightarrow (t\ln t-t)'=\ln t$)

无法绕开分部.

另法: $x\,dx=d(\frac{x^2}{2})$

无法处理

$$I=\int e^x d(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}e^x-\underbrace{\int\frac{x^2}{2}d(e^x)}_{\rightsquigarrow\int x^2e^x dx}$$

$\rightsquigarrow \int x^2 e^x dx$, 次数反而升高.

正解: $I=\int x\,d(e^x)=xe^x-\int e^x dx$

$$=xe^x-e^x+C=(x-1)e^x+C.$$

Upshot 分部积分可以提高或降低某项次数来求积分.

用分部积分求 $\ln t$:

$$I=\int\ln t\cdot dt=t\ln t-\int t\,d(\ln t)$$
$$=t\ln t-\int 1\cdot dt=t\ln t-t.$$

例: $I=\int x\sin x\,dx$

$$=\int x\,d(-\cos x)=-x\cos x-\int(-\cos x)dx$$
$$=-x\cos x+\sin x+C.$$

例：$I=\int x\ln^2 x\,dx$ ← 核心：用 upshot 将 $\ln x$ 次数 $2\to1\to0$.

挪到 d 后面的项 → 次数在升.

另一项 → 次数在降.

$$I=\frac{1}{2}\int \ln^2 x\,d(x^2)=\frac{1}{2}x^2\cdot\ln^2 x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln^2 x)$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x\,dx \quad 1次$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\int\ln x\,d\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\left(\frac{x^2}{2}\cdot\ln x-\int\frac{x^2}{2}d(\ln x)\right)$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$
$$\Rightarrow I=\frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x-\ln x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

有时看似无法直接下手（只给一个函数）

例：$I=\int\arctan x\,dx$
$$=x\arctan x-\int x\,d(\arctan x)$$
$$=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$
$$=x\arctan x-\int\frac{1}{1+x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$$

最麻烦的一种：循环现象.

例：$I=\int e^{ax}\cdot\sin bx\,dx$ 不断计算，回到自己. 解方程.
$$=\frac{1}{a}\int\sin bx\cdot d(e^{ax})$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{1}{a}\int e^{ax}d\sin bx$$
$$=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\boxed{\int e^{ax}\cos bx\,dx}$$

同理，$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\boxed{\int e^{ax}\sin bx\,dx}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx$$

$$\Rightarrow I = \frac{a^2}{a^2+b^2}e^{ax}\left(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx\right) + C$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C.$$

同理 $J = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos x + b\sin x) + C$.

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

习题: 1. $I = \int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,dx$ $\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$= -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\,d(\ln\cos x)$$

$$= -\cot x\ln\cos x + \int (-1)\cdot dx$$

$$= -\cot x\ln\cos x - x + C.$$

2. $I = \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad (a>0)$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\,d\sqrt{a^2-x^2} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

原则：使分子也出现 a^2-x^2

$$= x\sqrt{a^2-x^2} + \underbrace{\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx}_{\int\frac{a^2 d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = a^2\arcsin\frac{x}{a}} - \underbrace{\boxed{\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx}}_{I}$$

$a\,dx = a^2 d\left(\frac{x}{a}\right)$

$$\Rightarrow I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

例: $I_n = \int\sin^n x\,dx$ 降次

$$= \int\sin^{n-1}x\,d(-\cos x) = -\cos x\sin^{n-1}x + \int\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + \int\cos x\,(n-1)\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int\underbrace{\cos^2 x}_{1-\sin^2 x}\sin^{n-2}x\,dx$$

$$\Rightarrow I_n = -\sin^{n-1}x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \left(1-\frac{1}{n}\right)I_{n-2}.$$

例：$I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$ 原则：要使dx前有东西.

$$= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x}dx = I_{n-2} + \int \frac{\cos^2 x}{\sin^n x}dx$$

$$= I_{n-2} + \int \cos x \, d\left(\frac{\sin^{1-n}x}{1-n}\right)$$

$$= I_{n-2} + \cos x \cdot \frac{\sin^{1-n}x}{1-n} - \int \frac{\sin^{1-n}x}{1-n}d(\cos x)$$

$$= I_{n-2} + \cos x\frac{\sin^{1-n}x}{1-n} + \frac{1}{1-n}\underbrace{\boxed{\int \sin^{2-n}x\,dx}}_{I_{n-2}}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{1-n}\sin^{1-n}x\cos x + \frac{2-n}{1-n}I_{n-2}.$$

脑筋急转弯

用凑微分法

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = \int 2\sin x\,d\sin x = \sin^2 x + C \leftarrow C_1$$

$$\int 2\sin x\cos x\,dx = -\int 2\cos x\,d\cos x = -\cos^2 x + C \leftarrow C_2$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \underset{\substack{\uparrow \\ C_1}}{C} = -\cos^2 x + \underset{\substack{\uparrow \\ C_2}}{C} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = 0. \quad (\times)$$

有理函数的积分

理论

① 多项式在实数域可分解为不高于2次因式的乘积.

$\Downarrow$ (即:任何高于2次的式子一定能被继续分解).

② 真分式(分母次数比分子高)

一定可以分解为两种简单分式之线性组合

$\dfrac{C}{(x-a)^k}\ (k\geq 1)$, $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 1)$ (分解为二者的方式是唯一)

③ 非真分式可以化为真分式

e.g. $\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{x^2-1+1}{1-x}=\underbrace{-(1+x)}_{\text{多项式(可直接积)}}+\underbrace{\dfrac{1}{1-x}}_{\text{真分式}}$

例: $I=\int\dfrac{x^2}{1+x}dx=\int\dfrac{x^2-1+1}{1+x}dx$

$=\int(x-1)dx+\int\dfrac{1}{1+x}dx=\dfrac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C.$

分母全为一次

例: $I=\int\dfrac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2}dx$ 　想 $\dfrac{C}{(x-a)^k}$, 对于 $x+1$: $k=1$

对于 $2x+1$: $k=1,2$.

$=\int\left(\dfrac{C_1}{x+1}+\dfrac{C_2}{2x+1}+\dfrac{C_3}{(2x+1)^2}\right)dx$ 　待定系数法: ①展开,比较各幂次系数

② 利用极限.

同乘最高次

(i) 同乘 $x+1$, 令 $x\to-1$

$\leadsto$ 右式 $=C_1$, 左式 = 将 $x=-1$ 代入 $\dfrac{2x^2+3x+2}{(2x+1)^2}=1\Rightarrow C_1=1$

(ii) 同乘 $(2x+1)^2$, 令 $x\to-1/2$.

$\leadsto$ 左式 $=\left.\dfrac{2x^2+3x+2}{x+1}\right|_{x=-1/2}=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2}{\frac{1}{2}}=2$

右式 $=C_3$ 　$\Big\}\Rightarrow C_3=2.$

(iii) 最后处理非最高次项 (随缘)

令 $x=$ 特殊值 或 令 $x\to\pm\infty$.

$\leadsto$ 令 $x=0$, 左式 $=2$, 右式 $=C_1+C_2+C_3 \Rightarrow C_2=-1$

或 同乘 x, 令 $x\to+\infty$, $\frac{1}{2}=C_1+\frac{1}{2}C_2 \Rightarrow C_2=-1$.

总之, $I=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{2}{(2x+1)^2}\right)dx$

$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2x+1}+C$.

分母有二次不可约式

例: $I=\int\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}dx$

分解: $\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}$

待定系数法: (i) 同乘 $x-1$, 令 $x\to1 \Rightarrow C_1=-1$.

(ii) 问题: 二次式无根.

先相减, 再代入复根
会便于计算.

移项相减: $\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}+\frac{1}{x-1}$

$=\frac{-5x^2-4+(x^2+2)^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^4-x^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$

$\Rightarrow \frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$

同乘 $(x^2+2)^2$, 令 $x\to i\sqrt{2}$

$\Rightarrow M_2\cdot i\sqrt{2}+N_2=-2\cdot(i\sqrt{2}+1)=-2\sqrt{2}i-2$

$\Rightarrow M_2=N_2=-2$ (一次求两个)

(iii) 再减一次

$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}+\frac{2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^3+x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^2+2)+(x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{x+1}{x^2+2}$

$\Rightarrow M_1=N_1=1$.

总之, $I=\int\left(\frac{-1}{x-1}-\frac{2x-2}{x^2+2}+\frac{x+1}{(x^2+2)^2}\right)dx$

$$= -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

其中 $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$

$$= \frac{-1}{2(x^2+2)} + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

先求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2}$，再用分部积分升次数

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x}{x^2+2} + \int \frac{2x}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

最终，$I = -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+2)}$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

下一步目标：$I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

x^2+px+q 不可约，$\Delta = p^2-4q<0$.

$\rightsquigarrow$ 配方：$(x-x_0)^2+a^2 = x^2+px+q$，　$dx = d(x-x_0)$

原式转化为 $I_n = \displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$　$(a>0)$.

计算 I_n 的两种方法.

(一) 递推法，分部降次

乘1后作分部积分.

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int x\,(1-n)\cdot(x^2+a^2)^{-n}\cdot 2x\cdot dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

分子要出现分母的形式

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)\cdot a^2 I_n.$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

不加C.

回顾 先猜形式，再待定系数

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax}{x^2+2} + \lambda \int \frac{dx}{x^2+2}$$

两边求导得到 $\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{A(x^2+2)-2x\cdot Ax}{(x^2+2)^2} + \lambda\cdot\frac{1}{x^2+2}$

$$= \frac{A}{x^2+2} - \frac{2Ax^2}{(x^2+2)^2} + \frac{\lambda}{x^2+2}$$

$$= \frac{(A+\lambda)(x^2+2)-2Ax^2}{(x^2+2)^2}$$

$\Rightarrow \lambda - A = 0,\ 2(A+\lambda)=1 \Rightarrow \lambda = A = \frac{1}{4}$.

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}.$$

$$= \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(二) 三角代换法.

在 $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 中，令 $x = a\tan t$

则 $dx = a\sec^2 t\, dt$.

递推公式求解

$$\Rightarrow I_n = \int \frac{a\cdot\sec^2 t\, dt}{a^{2n}\cdot\sec^{2n} t} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int \cos^{2n-2} t\, dt$$

应用: $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \cos^2 t\, dt$

一个难算的不定积分

例: $I = \int \frac{dx}{1+x^4}$

解法一：分母因式分解（高于2次不方便积分）

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

$\Rightarrow$ 部分因式分解

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

待定系数找 M_1, N_1, M_2, N_2：直接代入 x 值

zsy是憨包

令 $x=0$，左式 $=1$，右式 $=N_1+N_2$

同乘 x，令 $x\to+\infty$，左式 $=0$，右式 $=M_1+M_2$

令 $x=i$，左式 $=\frac{1}{2}$，右式 $=\frac{M_1 i+N_1}{\sqrt{2}i}+\frac{M_2 i+N_2}{-\sqrt{2}i}=\frac{(M_1-M_2)i+(N_1-N_2)}{\sqrt{2}i}$

$\Rightarrow M_1-M_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$N_1-N_2=0$.

$\Rightarrow N_1=N_2=\frac{1}{2}$，$M_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，$M_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

$$\rightsquigarrow I=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

解法二：配对法

$$I=\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

记住：$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

有理三角函数积分

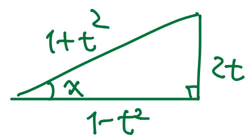
形如 $I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$，R分子分母均为二元多项式

核心：万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$.

目的：将其转化为有理积分（三角是假的）.

万能代换有效的原因：

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\overset{\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\overset{\|}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$



$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = d(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\Rightarrow I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$$
$$=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例：$I=\int\frac{dx}{\sin x}$ （用万能公式）

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

另法：同乘 $\sin x$

或利用半角公式：

$$I=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例：（泊松积分）$I=\int\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ $(0\le r<1)$

万能代换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$.

$$I=\int \frac{1}{1-2r\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{2\,dt}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}$$

$$=\int\frac{2\,dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}=\frac{2}{(1+r)^2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{(1+r)^2}\cdot\frac{1+r}{1-r}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C$$

$$=\frac{2}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C$$

万能代换缺点：分母 $1+t^2$ 次数较高，计算复杂.

以下情况不用万能代换：

① $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\cos x$

（将 $\sin x\,dx$ 化为 $d(-\cos x)=-d(\cos x)$）　　特例：$R(\cos x)\cdot\sin x$

② $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\sin x$　　特例：$R(\sin x)\cdot\cos x$

③ $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\tan x$.　　特例：$R(\tan x)$

例：$I=\int\frac{dx}{a+b\tan x}\quad(b\neq 0)$　　$dt=\frac{dx}{\cos^2 x}=(1+\tan^2 x)\,dx=(1+t^2)\,dx$

令 $t=\tan x\Rightarrow I=\int\frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)}$

$\Rightarrow I=\int\left(\frac{Mt+N}{1+t^2}+\frac{c}{a+bt}\right)dt$

待定系数：(i) 同乘 $a+bt$，令 $t\to-\frac{a}{b}$，

右式 $=c$，左式 $=\frac{b^2}{b^2+a^2}$

(ii) 移项计算

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}-\frac{b^2}{b^2+a^2}\cdot\frac{1}{a+bt}=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}(1+t^2)\right)$$

$$=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(a^2-b^2t^2)=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a-bt}{a^2+b^2}=\frac{Mt+N}{1+t^2}$$

$$I=\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt|-\frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2)+\frac{a}{a^2+b^2}\arctan t+C$$

$$=\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right|+\frac{ax}{a^2+b^2}+C$$

$$=\frac{ax}{a^2+b^2}+\frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x+b\sin x|+C.$$

另解：配湊法

$$I=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx\ ,\ 設\ J=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$$

$$\Rightarrow I=A\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}dx+B\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}dx$$

$$=A\ln|a\cos x+b\sin x|+Bx+C$$

其中 $Ab+Ba=1,\ -Aa+Bb=0$

$$\Rightarrow A=\frac{b}{a^2+b^2}\ ,\ B=\frac{a}{a^2+b^2}$$

定积分

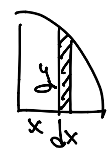
12个经典问题

例1: $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,d(\sin x)=\int_0^1 t^n\,dt=\frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$$

例2: 求圆 $x^2+y^2\le R^2$ 的面积

$$S=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx,\quad 令\ x=R\sin t$$



$y\,dx=dS$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\cdot R\cos t\,dt$$

$$=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=4R^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)=\pi R^2.$$

例3: $f(x)$ 周期函数，定义在 $\mathbb{R}$ 上. 证明: $\forall a\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^T f(x)\,dx.$$

证明: $\int_a^{a+T}f=\int_a^0 f+\int_0^T f+\int_T^{a+T}f$

对于 $\int_T^{a+T}f(x)\,dx$ 作代换 $x=t+T$

$x: T\to a+T,\quad t: 0\to a$

$$\Rightarrow\int_T^{a+T}f(x)\,dx=\int_0^a f(t+T)\,dt=\int_0^a f(t)\,dt=-\int_a^0 f(t)\,dt.$$

$\square$

注: 若 f 为连续函数，可对积分限求导

令 $F(a)=\int_a^{a+T}f(x)\,dx$，需证 $F(a)=F(0)$ (或 $F(a)=$ 常数)

$\Leftarrow F'(a)=f(a+T)-f(a)=0$ (f 周期).

例4: $I=\int_0^a\sqrt{a^2+x^2}\,dx\ \ (a>0)$

$$\Rightarrow I = \sqrt{a^2+x^2}\cdot x\Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= \sqrt{2}a^2 - \int_0^a \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

分子要有分母的形式 again!

$$= \sqrt{2}a^2 - I + \int_0^a \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\Big|_0^a = \frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

1245 (Wallis 公式 / 点火公式)

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

$\sin^n x = \cos^n(\frac{\pi}{2}-x)$

$dx = -d(\frac{\pi}{2}-x)$, $0\le x\le\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0\le\frac{\pi}{2}-x\le\frac{\pi}{2}$

分部积分降次

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

$$= -\cos x\cdot\sin^{n-1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(\sin^{n-1}x)$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cdot\cos^2 x\,dx$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n}I_{n-2},\quad I_0 = \frac{\pi}{2},\ I_1 = 1.$$

$$\Rightarrow I_n = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{奇} \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\frac{\pi}{2}, & n\text{偶}. \end{cases}$$

应用：(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x - \cos^4 x\,dx = I_2 - I_4$

$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$.

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,dx = \frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{16}{35}$.

1246: $\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\,dx=\begin{cases}0, & n\text{奇}.\\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx, & n\text{偶}\end{cases}$$

例9：f在$[0,1]$上有连续导函数，$f(0)=f(1)=0$.

证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\le\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx$

从左侧入手分部积分：

$$\int_0^1 f(x)dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx$$
$$=-\int_0^1 xf'(x)dx\quad(\text{不够})$$

带有$dx=d(x-\frac{1}{2})$的分部积分

$$\int_0^1 f(x)d(x-\tfrac{1}{2})=(x-\tfrac{1}{2})f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx$$
$$=-\int_0^1(x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)dx-\int_0^1 xf'(x)dx$$

$$\Rightarrow\left|\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\int_0^1(x-\tfrac{1}{2})f'(x)dx\right|$$
$$\le\int_0^1|x-\tfrac{1}{2}|\cdot|f'(x)|dx\le\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|dx.$$

对称性在积分计算中的应用.

在$[a,b]$区间上，$x\longmapsto a+b-x$

令$g(x)=f(a+b-x)$，$g(x)$与$f(x)$关于$x=\frac{a+b}{2}$轴对称

$$\Rightarrow g(x)=f(a+b-x)=f\left(\frac{a+b}{2}+\left(\frac{a+b}{2}-x\right)\right)$$

若f可积，则

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(a+b-x)dx$$

特别地，在$[0,a]$上：

$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx.$$

⇝ 奇偶性的推论：

f 在 $[0,a]$ 上，关于 $(\frac{a}{2},0)$ 为奇函数，
即 $\forall x\in[0,a]$，$f(x)=-f(a-x)$.
则 $\int_0^a f(x)dx=0$.

f 在 $[0,a]$ 上，关于 $x=\frac{a}{2}$ 为偶函数，
即 $\forall x\in[0,a]$，$f(x)=f(a-x)$，
则 $\int_0^a f(x)dx=2\int_0^{a/2}f(x)dx$.
不怎么用

一个重要恒等式，$\forall f$（不一定是偶函数）
$$\int_0^a f(x)dx=\int_0^{a/2}f(x)dx+\int_0^{a/2}f(a-x)dx$$ ← 比较有用.

更一般版本：$\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(f(x)+f(a+b-x))\,dx$.

例：$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

希望是 $[0,\pi]$ 上偶函数/奇函数

优先验证偶：
$$f(\pi-x)=\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}=\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\overset{?}{=}f(x)$$
$$\Rightarrow f(x)+f(\pi-x)=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x}$$
$$\Rightarrow I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例：f 在 $[-\pi,\pi]$ 上偶，在 $[0,\pi]$ 关于 $\pi/2$ 奇，

证明：$\forall n\in\mathbb{N}_+$，$I=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos 2nx\,dx=0$

被积 $f(x)\cdot\cos 2nx$ 在 $[-\pi,\pi]$ 偶
$$\Rightarrow I=2\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx$$
$$\text{其中}\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(f(x)\cos 2nx+\underbrace{f(\pi-x)}_{=-f(x)}\underbrace{\cos 2n(\pi-x)}_{=\cos(-2nx)=\cos 2nx})dx$$
$$=0$$

其它答案写法：作代换 $t=\pi-x$
$$\Rightarrow\int_0^\pi f(x)\cos 2nx\,dx=\int_\pi^0 f(\pi-t)\cos 2n(\pi-t)\,d(\pi-t)$$

$$= \int_0^{\pi} (-f(t)) \cos 2nt \, dt$$

$\Rightarrow I = -I \Rightarrow I = 0.$

例：$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$

直接代入 $1-x$，分母不友好，先换元：$x = \tan t$

$\Rightarrow dx = \sec^2 t \, dt$

$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t) dt$ $\quad = \frac{1-\tan t}{1+\tan t}$

$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t) + \ln(1+\boxed{\tan(\frac{\pi}{4}-t)}) \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln(1+\tan t + 1-\tan t) \, dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.$

因为 $\tan(\frac{\pi}{2}-x) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x.$

例：证明：$\forall \alpha \in \mathbb{R}$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^\alpha x} = \frac{\pi}{4}.$

只证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} = \frac{\pi}{4}.$

左式 $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^\alpha x} + \frac{1}{1+\cot^\alpha x}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\tan^\alpha x} + \frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}\right) dx = \frac{\pi}{4}.$

反常积分的敛散性

比较判别法

f, g 定义在 $[a,b)$ 上，以 b 为唯一奇点（可以取 $b=\infty$）

且 $|f(x)| \le |g(x)|$，$\forall x \in [a,b)$

则 g 绝对收敛 $\Rightarrow$ f 绝对收敛.

$\int_a^b |f|$ 发散 $\Rightarrow \int_a^b |g|$ 发散　　⚠ f 发散 $\not\Rightarrow$ g 发散.

例：证明 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$ 绝对收敛

唯一奇点为 $+\infty$. 则 $\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right| \le \left|\frac{1}{1+x^2}\right| = \frac{1}{1+x^2}$，$\forall x$ 成立

另外反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$.

例：证明 $\int_0^1 \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$ 绝对收敛.　有可能让函数值 $\to \infty$ 的点.

0 是唯一奇点，关键在处理 $\ln \sin x$.

利用 $0 < \sin x < x$，$\forall 0 < x < 1$，有

$|\ln \sin x| < |\ln x| \Rightarrow |原式| \le \int_0^1 \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} dx$ 发散　} 错解.

实际上，$|\ln \sin x| > |\ln x|$

启示：在 0 到 1 上，很多不等式会反向，一定要小心！

① 判别时要求每个积分有且仅有一个奇点.

② 尺度 $\begin{cases} \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} 0 < p < 1 \text{ 时，收敛，} \\ p \geqslant 1 \text{ 时，　　发散，} \end{cases} \\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx \begin{cases} p > 1 \text{ 时，收敛，} \\ p \leqslant 1 \text{ 时，发散.} \end{cases} \end{cases}$

正解：先估计 $\ln \sin x$　　$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$（计算细节）

$x \to 0^+$ 时，$\ln \sin x \sim \ln x$　（因为 $\sin x \sim x$）（利用洛必达法则）

存在 $C>1$，使得 $|\ln\sin x|\le C|\ln x|$，$\forall x\in(0,1]$.

用 $\ln x$ 与幂函数 $1/x^{\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ 相比，是无穷小量.

即 $\ln x = o\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$ $(x\to 0^+)$，$\varepsilon>0$

也即 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^{\varepsilon}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\varepsilon}\ln x=0$，$\varepsilon>0$.

细节：一般情况取 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 最稳.

取 $\varepsilon=1/4$，$\exists x_0\in(0,1)$，$\forall x\in(0,x_0)$

成立：$|\ln x|<\dfrac{1}{x^{1/4}}$，$\forall x\in(0,x_0)$

$$\Rightarrow\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right|\le\frac{C|\ln x|}{\sqrt{x}}<\frac{C}{x^{1/2}}\cdot\frac{1}{x^{1/4}}=\frac{C}{x^{3/4}}.$$

由 $\int_0^1\dfrac{1}{x^{3/4}}dx$ 收敛，原式绝对收敛.

若取 ε 较大，此式会发散.

2.带参数分情况讨论

例 8.15 若反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}\cos bx\,dx$ 收敛，求 a,b 的取值范围.

e^{-ax}

(x)　　√

$a>0$

【解】① 当 $a=b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}1dx$，发散；

② 当 $a=0,b\ne0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}\sin bx\Big|_0^{+\infty}$，发散.

③ 当 $a\ne0,b=0$ 时，反常积分为 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$.

a. 若 $a>0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx=-\frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{a}$，收敛；

b. 若 $a<0$，则上述反常积分 $\int_0^{+\infty}e^{-ax}dx$ 发散.

④ 当 $a\ne0,b\ne0$ 时，用两次分部积分法，实现积分再现，得

能再算一次

$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{b}e^{-ax}\sin bx-\frac{a}{b^2}e^{-ax}\cos bx-\int\frac{a^2}{b^2}e^{-ax}\cos bx\,dx,$$

于是
$$\int e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-ax}}{a^2+b^2}(b\sin bx-a\cos bx)+C,$$

且
$$\int_0^A e^{-ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}.$$

a. 若 $a>0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]=\frac{a}{a^2+b^2}$，收敛；

b. 若 $a<0$，则 $\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\frac{e^{-aA}}{a^2+b^2}(b\sin bA-a\cos bA)+\frac{a}{a^2+b^2}\right]$ 不存在，发散.

综上所述，只有 ③ 的 a 与 ④ 的 a 成立时，反常积分收敛，故当 $a>0$，b 任意时，反常积分收敛.

例：讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{y^{a-1}}{|y-1|^{a+b}}dy$ 的敛散性.

不能积，因为1是奇点. 共有3个奇点：0, 1, $+\infty$.

有可能让函数值 $\to\infty$ 的点.

目标：化为 $\int\frac{1}{x^p}$.

记被积函数 $=f(y)$

$|f(y)|$ 在不同奇点有不同表现.

① $y=0$ 处：$y\to0^+$

$|f(y)|\sim y^{a-1}$ $\quad\int y^{a-1}$ 在 $1-a<1$ 时收敛 $\Rightarrow a>0$.

② $y=1$ 处：$y\to1$

$|f(y)|\sim\frac{1}{|y-1|^{a+b}}$，$a+b<1$ 时收敛

③ $y\to+\infty$：

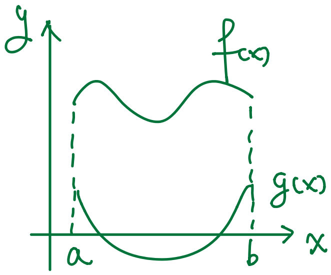
$|f(y)|\sim\frac{1}{y^{b+1}}$ $(y\to+\infty)$，$b>0$ 时收敛.

综上所述，$a>0$ 且 $b>0$ 且 $a+b<1$ 时，收敛且绝对收敛

否则发散.

平面图形面积计算

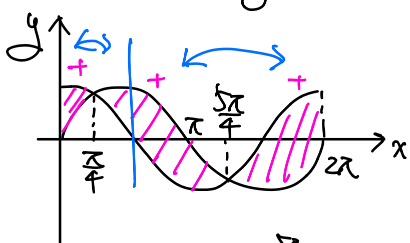
(一) 由 $f(x)$, $g(x)$ 所围面积



$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

注意：分段算绝对值积分.

例：求 $[0,2\pi]$ 上 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 围成的面积



$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx\\&\quad+\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}(\cos x-\sin x)\,dx\\&=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

注意到 $S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)\,dx$

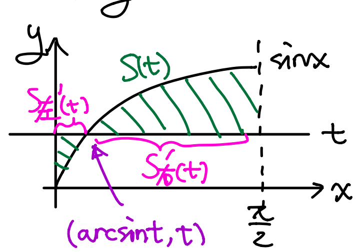
一般方法：利用 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 辅助角公式

其中 $\varphi=\arctan\frac{b}{a}$.

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi}|\sin x-\cos x|\,dx=\int_0^{2\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|dx\\&=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi-\frac{\pi}{4}}|\sin t|\,dt=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,dt=4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

不用画图也可以做.

例：$S(t)$ 是由 $y=\sin x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=t$ 围出面积

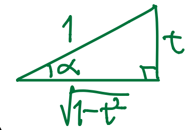


求 $S(t)$ 的最大/最小值

$$\begin{aligned}S(t)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|t-\sin x|\,dx\\&=\int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)\,dx+\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t)\,dx\end{aligned}$$

$\Rightarrow S(t) = t\arcsin t + \cos(\arcsin t) - 1$

$\qquad + \cos(\arcsin t) - t(\frac{\pi}{2} - \arcsin t)$



$\qquad = 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\underline{\cos(\arcsin t)}$

令 $\alpha = \arcsin t$, $\cos\alpha = \sqrt{1-t^2}$

$\qquad = 2t\arcsin t - 1 - \frac{\pi}{2}t + 2\sqrt{1-t^2}$.

$\Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t + \cancel{\frac{2t}{\sqrt{1-t^2}}} - \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}}$

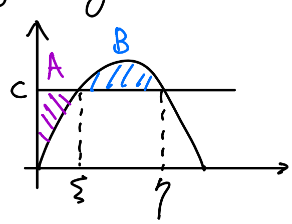
$\qquad = 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

$S'(t)=0$ 的根是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $S'(t)$ 左负右正. 极小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})$

极大值 $\max\{S(1), S(0)\}$.

几何解释: $S'_{左}(t) = \arcsin t$, $S'_{右}(t) = -(\frac{\pi}{2} - \arcsin t)$ $\Big\} \Rightarrow S'(t) = 2\arcsin t - \frac{\pi}{2}$.

例: $y=c$ 与 $y=2x-3x^3$ 交于第一象限. 何种 c 可使 $A=B$?



$\int_\xi^\eta (2x-3x^3-c)\,dx = \int_0^\xi (c-2x-3x^3)\,dx$

$\Leftrightarrow \int_0^\eta (2x-3x^3-c)\,dx = 0$

且 $2\eta - 3\eta^3 = c$.

(二) 参数方程形式下的面积

情况一: $y=y(x)$, $a \le x \le b$ 由 $x=x(t)$, $y=y(t)$ 给定 $(\alpha \le t \le \beta)$.

没有 $y(x)$ 的显式表达式. $\rightsquigarrow$ 找 $y = y(t(x))$

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[dr] & \\ x \arrow[ur] \arrow[rr, dashed] & & y \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ 需要找 $t(x)$ 作为 $x(t)$ 反函数 (只有单调的函数有反函数)

本质: 对 $\int_a^b y(x)\,dx$ 用换元法.

(i) 若 $x(t)$ 严格增. $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$

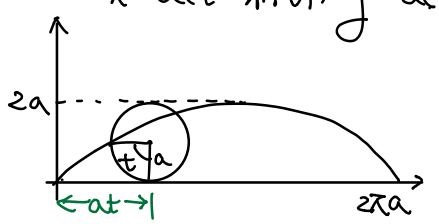
$$S=\int_a^b y(x)\,dx=\int_\alpha^\beta y(x(t))\cdot x'(t)\,dt=\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

(ii) 若 $x(t)$ 严格减, $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$.

$$S=\int_a^b y(x)\,dx=-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)).$$

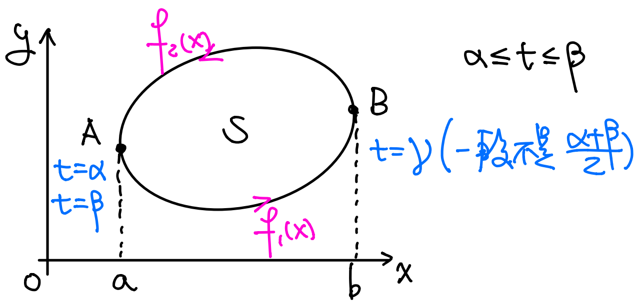
例: 求旋轮线一拱与 x 轴所围图的面积.

$x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$



$$S=\int_0^{2a\pi} y(x)\,dx=\int_0^{2\pi} y(t)\,d(x(t))$$
$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2 t-2\cos t)\,dt=\cdots.$$

情况二: 求由参数方程表示的封闭图形的面积.



$\alpha\le t\le\beta$

$$S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)\,dx=-\int_\gamma^\beta y(t)\,d(x(t))-\int_\alpha^\gamma y(t)\,d(x(t))$$

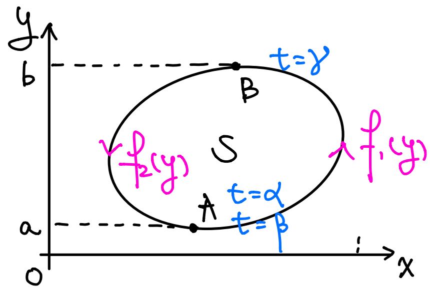
$x(t)\downarrow$ $-\int_\gamma^\beta$　　$x(t)\uparrow$ $+\int_\alpha^\gamma$

$$=\boxed{-\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t))}$$

差别

类似地, y 轴版本:

$$S=\int_a^b\big(f_1(y)-f_2(y)\big)\,dy=\int_\alpha^\gamma x(t)\,d(y(t))+\int_\gamma^\beta x(t)\,d(y(t))$$



$$= \boxed{\int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t))}$$

结论：上两式相加，除2，得

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (x(t)\,dy(t) - y(t)\,dx(t))$$

有对称性
一般来说是最好的.

例：求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围面积

参数方程 $x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad (0 \le t \le 2\pi)$

① 用 $S = \int_\alpha^\beta x(t)\,d(y(t)) = \int_\alpha^\beta x\,dy$

$$\Rightarrow S = \int_0^{2\pi} a\cos t \cdot b\cdot \cos t\,dt$$

$$= ab\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt = ab\pi$$

② 用 $S = -\int_\alpha^\beta y(t)\,d(x(t)) = -\int_\alpha^\beta y\,dx$

$$\Rightarrow S = -\int_0^{2\pi} b\sin t\cdot a(-\sin t)\,dt = ab\pi$$

③ 用 $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta x\,dy - y\,dx$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}(2\cdot ab\pi) = ab\pi.$$

例：求 Descartes 叶形线 $x^3+y^3=xy$ 在第一象限的面积

重要：多项式曲线如何参数化？

$y = tx$，t = 到原点连线斜率

$\Rightarrow x^3 + t^3x^3 = tx^2$ ⟵ 左右相差一次，所消 x^2.

$\Rightarrow x(1+t^3) = t \Rightarrow x = \frac{t}{1+t^3},\ y = \frac{t^2}{1+t^3}.\ (0 \le t \le +\infty)$

若左右次数相差较大，试 $y = tx^n\ (n \geq 2)$.

$\Rightarrow x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\ y'(t) = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}.$

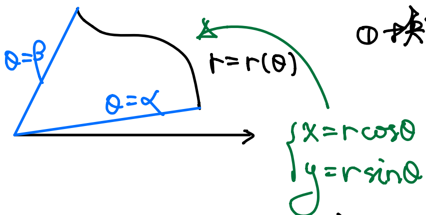
$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\,dy - y\,dx = \cdots$

虚假的广义积分（后面有理分式，可算不定积分）.

(三) 极坐标下的面积

设定 设曲线极坐标方程 $r=r(\theta)$, $\alpha\le\theta\le\beta$,

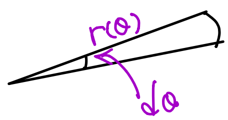
求该曲线与 $\theta=\alpha$, $\theta=\beta$ 所围面积



① 换直角坐标 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

只能得到一个边界.

② 更好的方法: 分割成小圆弧

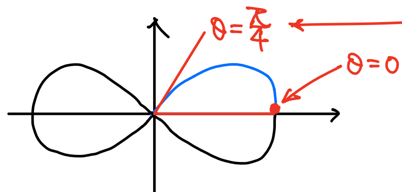


$S=\frac{1}{2}r(\theta)^2\cdot d\theta$

弧长: $r(\theta)\cdot d\theta$ ⇝ 近似成三角形 $S=\frac{1}{2}r(\theta)\cdot r(\theta)\cdot d\theta$

结论: $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$.

例: 双纽线 $r^2=a^2\cos2\theta$ 所围的面积



从式子中可看出来:

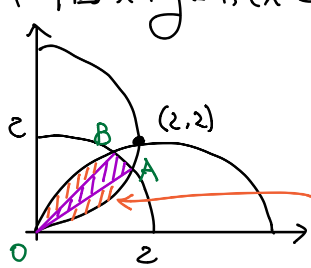
$r^2=a^2\cos2\theta\ge0 \Rightarrow \cos2\theta\ge0$

第一象限内: $\left.\begin{matrix}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ \cos2\theta\ge0\end{matrix}\right\} \Rightarrow 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}$.

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos2\theta\,d\theta$$

$$=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\theta\,d(2\theta)=a^2.$$

例: 求三个圆 $x^2+y^2\le4$, $(x-2)^2+y^2\le4$, $x^2+(y-2)^2\le4$ 所围面积



$S_{扇形AOB}=\frac{1}{2}\cdot r^2\cdot\alpha=2\alpha=\frac{\pi}{3}$.

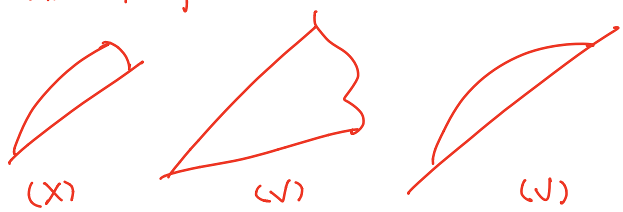
$S_{一个弓形}=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2}\cdot16\sin^2\theta\,d\theta=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2\theta\,d\theta$

$x^2+y^2=4y \Leftrightarrow r=4\sin\theta$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{6}$.

$$\Rightarrow S_{两个弓形} = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3},$$

$$\Rightarrow S = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}.$$

⚠ 必须有一侧边界是直线

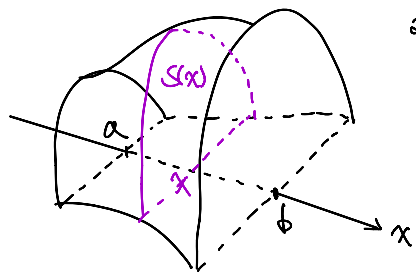


(×) (√) (√)

旋转体的体积

(一) 一般体积公式

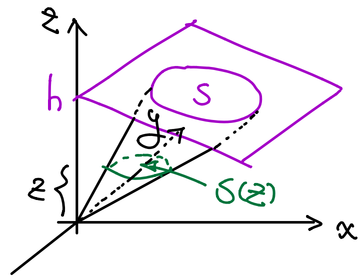
设立 一个几何体夹在空间垂直于x轴的两张平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 $(a<b)$.



对于每个 $x\in[a,b]$, 用平面 $X=x$ 去截, 截面积 $S(x)$.

$$\Rightarrow \quad V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

例: 求底面积为S, 高为h的圆锥体体积.



相似三角形 $\Rightarrow S(z)=\frac{z^2}{h^2}S$

$$\Rightarrow V=\int_0^h \frac{z^2}{h^2}S\,dz=\frac{1}{3}Sh.$$

例: 求 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积 $(a,b,c>0)$.

用平行于 XOY 的截面 $Z=z$, $-c\le z\le c$ 去截椭球.

截面为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}$.

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2(1-\frac{z^2}{c^2})}+\frac{y^2}{b^2(1-\frac{z^2}{c^2})}\le 1.$$

$$\Rightarrow \quad S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)$$

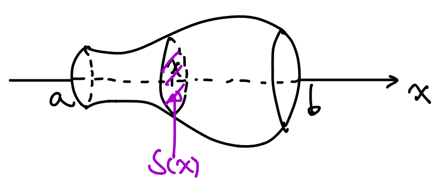
$$\Rightarrow \quad V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=2\pi ab\int_0^c\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz$$

$$=2\pi ab\left(c-\frac{c^3}{3c^2}\right)=\frac{4}{3}\pi abc.$$

(二) 旋转体的体积

设定 曲边梯形 $\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ 0\le y\le y(x)\}$

围绕 x 轴旋转一周所得立体旋转体.



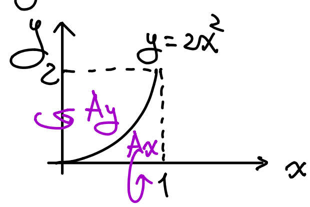
$$V=\int_a^b \pi (y(x))^2\,dx$$ ← 中心实心

$(y(x))^2-0^2=(y(x))^2$.

注: 若中心是空心的, 主 $S(x)$ 为圆环算

$$\Rightarrow S(x)=\pi(y_2^2-y_1^2).\quad (y_1(x)\le y\le y_2(x)).$$

例: $y=2x^2\ (0\le x\le 1)$ 决定两个曲边梯形



$A_x=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2x^2\}$

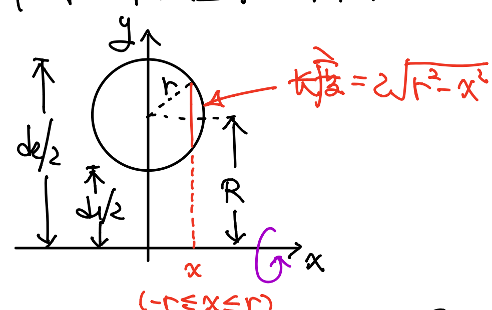
$A_y=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 2\}$ ← 对Ay使用 需要换成y范围 (关于dy积)

$\quad=\{(x,y)\mid 0\le y\le 2,\ 0\le x\le \sqrt{\frac{y}{2}}\}$.

$$\Rightarrow V_x=\int_0^1 \pi y^2\,dx=\pi\int_0^1 4x^4\,dx=\frac{4}{5}\pi.$$

$$V_y=\int_0^2 \pi x^2\,dy=\pi\int_0^2 \frac{y}{2}\,dy=\pi.$$

例: 求一个救生圈的体积. 内直径 d_1, 外直径 d_2.



对于 $-r\le x\le r$,

$X=x$ 生成的截面为圆环

外半径 $R+\sqrt{r^2-x^2}$

内半径 $R-\sqrt{r^2-x^2}$.

$$\Rightarrow S(x)=\pi(R+\sqrt{r^2-x^2})^2-\pi(R-\sqrt{r^2-x^2})^2$$

$$=4\pi R\sqrt{r^2-x^2}$$

$$\Rightarrow \quad V=\int_{-r}^{r} 4\pi R\sqrt{r^2-x^2}\,dx = 8\pi R \underbrace{\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx}_{=\frac{\pi r^2}{4}} = 2\pi^2 R r^2.$$

1/4圆的面积

其中 $R=\frac{1}{4}d_1+\frac{1}{4}d_2$，$r=\frac{d_2}{4}-\frac{d_1}{4}$.

注：Guldin定理：$V=$小面积×周长 $=\pi r^2\cdot 2\pi R$.

（不能自己用）.

平面图形围绕不穿过其内部的轴

旋转得到的体积 = 面积 × 形心旋转得到的周长

图形的重心

二重积分

(一) 一般区域上的二重积分

f在D上可积，D可以表示成 x型区域

$$D = \{(x,y) \mid y_1(x) \le y \le y_2(x),\ a \le x \le b\}$$

关于x

且对每个固定x， $\varphi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$ 存在，

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy$$

同理，若D可表示为 y型区域

$$D = \{(x,y) \mid x_1(y) \le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\}$$

关于y

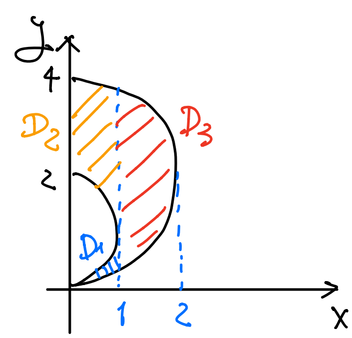
且对每个固定y， $\psi(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx$ 存在.

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

一般区域：分解为x与y型区域的并.

以方便计算为原则，决定积分顺序.

例： $D = \{(x,y) \mid 2y \le x^2+y^2 \le 4y,\ x \ge 0\}$



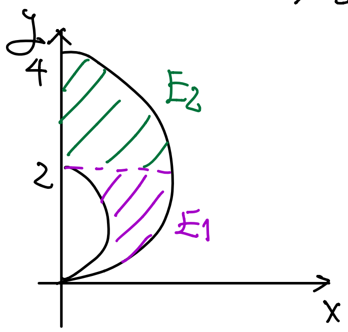
① 表示为x型：

$$D_1 = \{2-\sqrt{4-x^2} \le y \le 1-\sqrt{1-x^2},\ 0 \le x \le 1\}$$

$$D_2 = \{1+\sqrt{1-x^2} \le y \le 2+\sqrt{4-x^2},\ 0 \le x \le 1\}$$

$D_3=\{2-\sqrt{4-x^2}\le y\le 2+\sqrt{4-x^2},\ 1\le x\le 2\}$

$\Rightarrow D=D_1\cup D_2\cup D_3$.



② 表示为y型:

$E_1=\{\sqrt{2y-y^2}\le x\le \sqrt{4y-y^2},\ 0\le y\le 2\}$

$E_2=\{0\le x\le \sqrt{4y-y^2},\ 2\le y\le 4\}$

$\Rightarrow E_1\cup E_2=D$.

注: 当 $f(x,y)$中含有 x^2+y^2项

或 D的边界表达式中含有 x^2+y^2项.

则 可利用 $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

先化为极坐标下二重积分,

然后关于r和θ的二次积分去求解.

例: 将上题的D分解成r型区域和θ型区域.

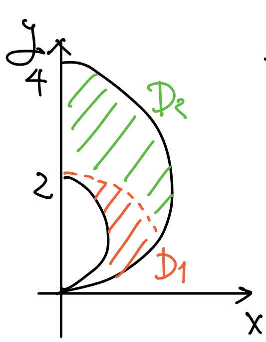
在极坐标系中, D的边界

$$x^2+y^2=2y \longleftrightarrow r^2=2r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r=2\sin\theta}$$

$$x^2+y^2=4y \longleftrightarrow r^2=4r\sin\theta \Longleftrightarrow \boxed{r=4\sin\theta}$$

$$x=0 \longleftrightarrow r\cos\theta=0 \Longleftrightarrow \boxed{\theta=\frac{\pi}{2}}.$$

表示为r型区域:



$$\Rightarrow D_1=\begin{cases}0\le r\le 2\\ \arcsin\frac{r}{4}\le\theta\le\arcsin\frac{r}{2}\end{cases}$$

$$D_2=\begin{cases}2\le r\le 4\\ \arcsin\frac{r}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}.$$

$D=D_1\cup D_2$.

表示为θ型区域: $D=\begin{cases}0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\\ 2\sin\theta\le r\le 4\sin\theta\end{cases}$

例: 求 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

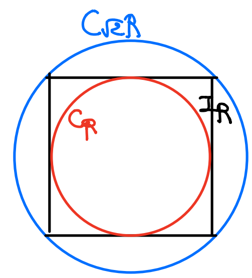
Key 长得像极坐标积分

但区域不是圆: 用夹逼

⚠不要试图将方形写成极坐标 会变得不幸.

记 $I_R=\iint\limits_{\substack{|x|\le R\\|y|\le R}}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

$C_R=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$



$\rightsquigarrow$ $C_R=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^2e^{-r^2}\cdot(r\,dr)$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r^3e^{-r^2}dr=\pi\int_0^{R^2}te^{-t}dt$

$=\pi(1-e^{-R^2}-R^2e^{-R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$

同理 $C_{\sqrt{2}R}=\pi(1-e^{-2R^2}-2R^2e^{-2R^2})\to\pi\quad(R\to+\infty)$

利用 $C_R\le I_R\le C_{\sqrt{2}R}$ 夹逼, 得到 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_R=\pi$.

例: 作极坐标替换, 将

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy$$

化成定积分, 其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x\le 1\}.$$

令 $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

$$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,dx\,dy=\iint\limits_\Phi f(r)\cdot r\,dr\,d\varphi$$

$$=\int_0^1 dr\int_0^{\pi/4}f(r)\,r\,dr+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r}\right)f(r)\,r\,dr$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} f(r)\, r\,dr - \int_1^{\sqrt{2}} \arccos\frac{1}{r}\, f(r)\cdot r\,dr \qquad \square$$

(二) 二重积分的变量替换

直角—极坐标互化：

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow \boxed{dx\,dy = r\,dr\,d\varphi}$$

例：求曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ 所围面积.

应用广义极坐标替换

$$x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta.$$

$$\Rightarrow J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = ab\rho,\quad \text{曲线} \Leftrightarrow \rho^2 = \cos 2\theta \ (\text{双纽线})$$

数学分析学过：

对于变量代换 $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \end{cases} (u,v)\in D'$

应满足 行列式 $J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

在 D' 内无零点，即 $J \neq 0,\ \forall (u,v)$.

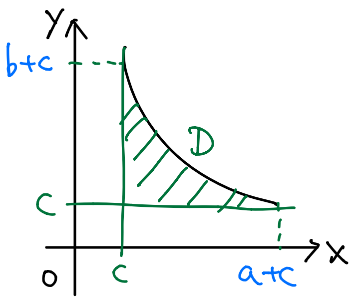
$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D'} f(x(u,v),\ y(u,v))\cdot J\cdot du\,dv$$

所以 $S = \iint_D dx\,dy = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}} ab\rho\,d\rho = ab.$

例：求 $\iint_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right) dx\,dy$，　←本例想说：万物都可极坐标化

其中 D 由 $x=c,\ y=c$ 和

曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} = 1$ 所围成．$(a,b,c>0)$.



令 $x = c + a\rho\cos^4\theta,\ y = c + b\rho\sin^4\theta$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}} = \sqrt{\rho}\cdot\cos^2\theta + \sqrt{\rho}\cdot\sin^2\theta = \sqrt{\rho}$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a\cos^4\theta & b\sin^4\theta \\ -4a\rho\cos^3\theta\cdot\sin\theta & 4b\rho\sin^3\theta\cdot\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta.$$

积分区域化为 $\{0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le 1\}$.

于是 $\iint\limits_D \left(\sqrt{\frac{x-c}{a}} + \sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 4ab\rho\cos^3\theta\sin^3\theta\sqrt{\rho}\,d\rho = \frac{2}{15}ab.$

不重要的注：一般而言，广义极坐标变换

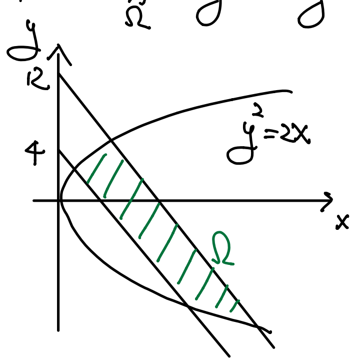
$$x = \frac{1}{a}\left(c + r^{\frac{1}{p}}\cdot\cos^{\frac{2}{p}}\theta\right),\quad y = \frac{1}{b}\left(d + r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta\right)$$

能将 $(ax-c)^p + (by-d)^p$ 变成 r.

但其中 r,θ 不再有通常的极径、极角之意义

（所以不要对着图想当然地写变换区域）.

例：求 $I = \iint\limits_\Omega (x+y)dxdy$，其中 Ω 由 $y^2 = 2x,\ x+y = 4,\ x+y = 12$ 围成.



作变换 $u = x+y,\ v = y$

$\rightsquigarrow$ 区域：$\begin{cases} 4 \le u \le 12 \\ -1-\sqrt{2u+1} \le v \le -1+\sqrt{2u+1}. \end{cases}$

且 $J = 1$. 于是

$$I = \int_4^{12} u\,du \int_{-1-\sqrt{2u+1}}^{-1+\sqrt{2u+1}} dv$$

$$= \int_4^{12} 2u\sqrt{2u+1}\,du \quad (\sqrt{2u+1} = t)$$

$$= \int_3^5 (t^2-1)t^2\,dt = \frac{8156}{15}.$$

Last Tips 奇偶性和积分区域对称性可用来简化计算.

① D关于x轴对称 + 关于y奇/偶

* $f(x,y) = -f(x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 关于y奇.

* $f(x,y) = f(x,-y)$

取半边D

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{y\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$$ 关于y偶

② D关于y轴对称 + 关于x奇/偶

* $f(x,y) = -f(-x,y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0.$ 关于x奇

* $f(x,y) = f(-x,y)$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)\,dx\,dy$$ 关于x偶

③ D关于(0,0)中心对称

* $f(x,y) = -f(-x,-y) \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$ 两侧相反

* $f(x,y) = f(-x,-y)$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{D^+} f(x,y)\,dx\,dy$$ 两侧相同

D^+ 为D在第一象限的部分.

多元函数极限

求多元函数极限的常用方法:

1. 利用函数连续性 + 极限运算性质
2. 不等式放缩 或 夹逼定理 ← 一般是夹0和某个趋于0的式子.
3. 利用变量替换 ⇝ 化简为已知极限.

   e.g. 令三角函: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1$, $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$, ⚠此处t只能与x和y其一有关

   令指数函: $\lim_{t\to 0}(1+\frac{1}{t})^{t}=e$.
4. 初等变形: 分母有理化、指对数形式取对数. $\cancel{\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^3)}{x^2+y^2}}$

(一) 二重极限(若存在)的计算

例1: 求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ ← 次数: 分子 > 分母 ⇒ 极限 = 0.

基本方法: 预期极限为0时,

极坐标代换 ⇝ 化为 有界量 × 无穷小量.

令 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)=0.$$

无论θ如何, $r\to 0$ 即可.

⇒ 二元化一元.

例2: 求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

错解: $\sin(x^3+y^3)\sim x^3+y^3$, $(x,y)\to(0,0)$.

此处是对的, 但不能对所有二元极限做此操作!

修正方法: Taylor展开 (一元, 对 x^3+y^3)

$\sin(x^3+y^3)=x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)$ $(|x|+|y|\to 0)$

$$\Rightarrow \text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3+o(|x|^3+|y|^3)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

另法：不等式放缩．　经典方法：$\sin(\cdots)$都可这样做．

$$|\sin(x^3+y^3)| \le |x|^3+|y|^3 \le (|x|+|y|)(x^2+y^2)$$

$$\Rightarrow \text{原式} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = 0.$$

例3：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$，其中 $f(x,y)=\begin{cases} \frac{\sin xy}{x}, & x\neq 0 \\ y, & x=0, y\neq 0 \end{cases}$

须放缩：

$$|f(x,y)| = \begin{cases} \left|\frac{\sin xy}{x}\right| \le |y|, & x\neq 0 \\ |y|, & x=0 \ \& \ y\neq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$$

若上下不一致，另较大的那个．

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

例4：求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{xy}$．　先求其对数的极限．

先求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2)$：

放缩 $|xy\ln(x^2+y^2)| \le r^2\ln r^2$ $(r\to 0^+)$，$r^2=x^2+y^2$．　极限为0．

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\ln(x^2+y^2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{原式} = e^0 = 1.$$

例5：证明 $\lim_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)} \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} = 0$　底数极限不总是存在！

check：$x^2\ln\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$ 极限不存在．

使用夹逼方法：

注意到 $x>0, y>0$ 时：$0 < \frac{xy}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad 0 < \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = 0 \Rightarrow$ 原式 $=0$.

(二) 累次极限

<u>核心命题</u> 二重极限存在: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$

(1) $y \ne y_0$ 时, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在,

$$\Rightarrow \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y) = A$$

(2) $x \ne x_0$ 时, $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在,

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y) = A.$$

解释: ① 二重极限存在 + 二次极限存在

$\Rightarrow$ 二次极限 = 二重极限

② 一般情况下, 两者无必然联系

e.g. 二重极限存在 $\begin{cases} \text{两个二次极限均不存在} \\ \text{有且仅有一个存在} \end{cases}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y \ne 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

满足 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y) = 0$

但 $\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0} f(x,y)$ 不存在.

e.g. 二重极限不存在 $\begin{cases} \text{两个二次极限存在且相等} \\ \text{有且仅有一个存在} \end{cases}$

$\nwarrow f(x,y)=\frac{y}{x},\ x\neq 0$

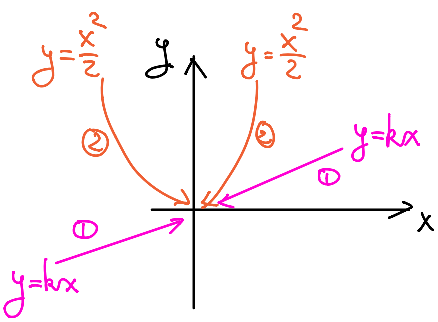
$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y),\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 不存在

且 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$.

(三) 证明重极限不存在的方法

方案一：找两种特殊的趋近方式（使得在两种方式下极限不同）.

例：$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2\leq |y| \text{ 或 } y=0\\ 1, & \text{其它}.\end{cases}$



① 沿 $y=kx$：$(x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y=kx)\to(0,0)} f(x,y)=0$

② 沿 $y=\frac{x^2}{2}$：$(x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow f(x,y)=\begin{cases}0, & x=0 \text{ 或 } y=0\\ 1, & \text{其它}\end{cases}$ （否则不可能有 $x^2\leq|y|=\frac{x^2}{2}$）

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y=x^2/2)\to(0,0)} f(x,y)=1.$

由①②，重极限不存在.

方案二：证明两个累次极限存在但不相等

（如果两个二次极限存在 + 二重极限存在，

由命题，三个极限应相等，矛盾）.

例：$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1,\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$ 可见重极限不存在.

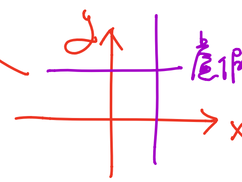
多元函数的连续性

连续性定义

如果 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

⚠ $f(x,y)$ 对 x 和 y 分别都连续 $\not\Rightarrow$ $f(x,y)$ 对 (x,y) 连续.

e.g. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$



虚假的连续.

在全平面分别对 x 和 y 均连续.

但作为二元函数，在原点不连续.

例：令 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+xy)}{x}, & x\neq 0 \\ y, & x=0. \end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在定义域上均连续.

证明：$f(x,y)$ 之定义域为 $xy>-1$

且 $f(x,y)$ 在 $x\neq 0$ 处连续.

只需证 $f(x,y)$ 作为二元函数在 y 轴上各点连续.

① 在 $(0,0)$：$f(0,0)=0$，而 $x\neq 0$ 时

$$f(x,y)=\frac{\ln(1+xy)}{x}=\begin{cases} 0, & y=0 \\ y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}, & y\neq 0. \end{cases}$$

又由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}=1$

$\Rightarrow \exists \delta_1>0,\ \forall\, 0<|x|<\delta_1,\ 0<|y|<\delta_1,$

$$\left|\frac{\ln(1+xy)}{x}\right| \le |y|\left|\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}\right| \le 2|y|.$$

只要 $|x|<\delta_1,\ |y|<\delta_1$，无论在 $x=0$ 或 $x\neq 0$ 均有

$$|f(x,y)| \le 2|y|.$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

② 在$(0,y_0)$，$y_0\neq 0$：

当$x\neq 0$时，
$$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |y\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} - y_0|$$
$$= |y(\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1) + (y-y_0)|$$
$$\leq |y||\ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}}-1| + |y-y_0|.$$

而当$x=0$时，$|f(x,y)-f(0,y_0)| = |y-y_0|$.

注意到当$y_0\neq 0$时
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \ln(1+xy)^{\frac{1}{xy}} = 1,$$

结合上述各式得
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (f(x,y) - f(0,y_0)) = 0.$$

$\Rightarrow$ $f(x,y)$在$(0,y_0)$处连续，从而在其定义域上连续.

顺便一提：

$f(x,y)$对x和y分别连续 + $f(x,y)$关于x或y单调

$\Rightarrow$ $f(x,y)$关于(x,y)作为二元函数连续.

偏导数

(一) 偏导数的定义

二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处偏导数

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

类似可以定义 $f_y(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$

例：求 $f(x,y) = \begin{cases} y\ln(x^2+y^2), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处偏导数.

$$\frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0, \quad \frac{f(0,\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \ln(\Delta y)^2$$

$\Rightarrow f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0)$ 不存在.

多元函数偏导定义来自一元版本 $\rightsquigarrow$ 所有一元运算法则均适用.

e.g. 四则运算 & 链式法则.

(二) 偏导数与连续

⚠ 一元函数：可导 $\Rightarrow$ 连续

二元函数：在某点 f_x, f_y 均存在 $\not\Rightarrow$ 连续

反例：$f(x,y) = \begin{cases} 1, & xy \neq 0 \\ 0, & xy = 0 \end{cases}$

甚至不存在极限

$\Rightarrow f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，但 f 在 $(0,0)$ 不连续.

连续性判别法

$f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$、$\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 邻域内存在且有界

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 连续

证明： $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$

$= (f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)) + (f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0))$

利用一元函数微分中值定理

$$\Rightarrow \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$(0<\theta_1, \theta_2<1)$

f_x, f_y 在 (x_0,y_0) 邻域内有界 $\Rightarrow \lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \Delta f = 0$.

$\Rightarrow f$ 在 (x_0,y_0) 处二元连续.

具体操作方法

6. 偏导数的连续性

对于 $z=f(x,y)$，讨论其在某特殊点 (x_0,y_0)（比如二元分段函数的分段点）处偏导数是否连续，是考研的重点，其步骤为：

①用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

②用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立. 若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

高阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = f_{yx},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = f_{xy}.$$

需要知道 f_{xy} 与 f_{yx} 不总是相等，具体条件不须知道.

全微分

(一) 全微分的定义与基本性质

5. 可微

先看一个引例. 如图 1-11-10 所示，设矩形的长和宽分别为 x 和 y，则此矩形的面积 $S=xy$. 若 x,y 分别增长 $\Delta x,\Delta y$，则该矩形面积的增量为

$$\Delta S=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y.$$

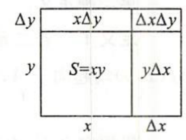


图 1-11-10

上式右端由两部分组成：一部分是 $y\Delta x+x\Delta y$，它是关于 $\Delta x,\Delta y$ 的线性函数；另一部分是 $\Delta x\Delta y$，因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2}=0,$$

所以当 $\Delta x\to 0,\Delta y\to 0$ 时，$\Delta x\Delta y$ 是比 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 高阶的无穷小量，即

$$\Delta S=y\Delta x+x\Delta y+o(\rho)\ (\rho\to 0).$$

$y\Delta x+x\Delta y$ 是 ΔS 的主要部分，$o(\rho)$ 是误差，

$$\Delta S\approx y\Delta x+x\Delta y.$$

称 $y\Delta x+x\Delta y$ 为函数 $S=xy$ 在点 (x,y) 处的全微分.

$S=x^2y$

$\Delta S=(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)-x^2y$

$=\cancel{\Delta x^2}(y+\Delta y)+2x\cdot\Delta x(y+\Delta y)$

$=2xy\cdot\Delta x$

设 $z=f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域上有定义. 如果

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$
$$=A\Delta x+B\Delta y+o(r)$$

例：$e^{\frac{1}{\Delta x}}$ 就不可微.

仅与 (x_0,y_0) 有关 而与 $\Delta x,\Delta y$ 无关的常数

$r^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$

则称 f 在 (x_0,y_0) 可微，称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为全微分.

记作 $dz=A\Delta x+B\Delta y=Adx+Bdy$

可微 = 在该点附近，$f(x,y)$ 可被 Δx 与 Δy 的线性函数近似代替.

f 在 (x_0,y_0) 可微 $\Rightarrow$ 在 (x_0,y_0) 附近邻域内有

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx\underbrace{f(x_0,y_0)+A\Delta x+B\Delta y}_{\text{线性}}$$

其中 $A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)$，$B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$

最终版本: $dz = f_x dx + f_y dy$

或 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y$.

例: 求 $A=\sqrt{1-(1.004)^2+(1.994)^2}$ 的近似值

取 $z=f(x,y)=\sqrt{1-x^2+y^2}$, $x_0=1$, $y_0=2$

$\Delta x=0.004$, $\Delta y=-0.006$.

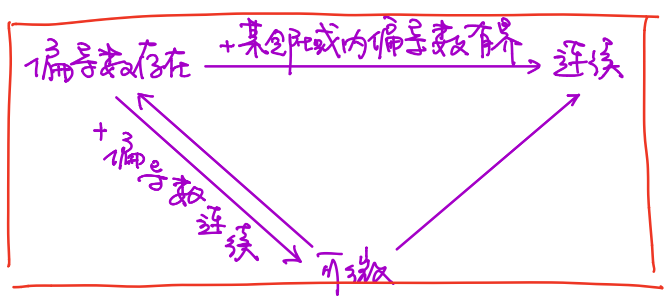
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)=-\frac{1}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2)=1$.

$\Rightarrow A=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(1,2)-\frac{1}{2}\cdot(0.004)+1\cdot(-0.006)=1.992$.

(二)连续、偏导数存在与可微

导数: 只变一个变量

微分: 所有变量同时变一点



由此得: 证明f不可微的常用方法:

(1) 证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处至少有一个偏导数不存在 ← 慎用

(2) 证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 不连续

(3) 从定义出发, 证 $\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y \neq o(r)$.

其中 $r^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2$.

例: 设 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$. 证明: (1) f 在 $(0,0)$ 连续

(2) $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ 都存在

(3) $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

(1) $(x_0,y_0)=(0,0)$, $|\Delta f| = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

定义：$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(\Delta x,\Delta y) = \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} (f(0,0)+\Delta f) = 0 = f(0,0)$$

(2) 按定义(而非按求导法则)计算：

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = 0.$$

用第(3)条，比较 $o(r)$.

(3) $\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y = |\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}$

取 $\Delta x=\Delta y\to 0$，则

$$\frac{\Delta f - f_x(0,0)\Delta x - f_y(0,0)\Delta y}{r} = \frac{|\Delta x|^{1/2}\cdot|\Delta y|^{1/2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \to 1/\sqrt{2} \neq 0$$

所以上式 $\neq o(r)$，f 在 $(0,0)$ 不可微.

例：利用上述第(1)(3)条：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\cdot\sin\frac{1}{(\Delta x)^2}}{\Delta x}$$

例 13.7 已知函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

证明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数不连续，但 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

【证】 易知 $f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2}=0$，$f_y'(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta y)^2}=0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处偏导数存在，从而

$$f_x'(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0, \text{由定义}\end{cases}$$

$$f_y'(x,y)=\begin{cases}2y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \text{由求导法则}\\ 0, & x^2+y^2=0. \text{由定义}\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{\substack{y=x\\x\to 0}} f_x'(x,y)$ 和 $\lim\limits_{\substack{x=y\\y\to 0}} f_y'(x,y)$ 都不存在，故 $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $(0,0)$ 处均不连续.

又由 $\Delta f=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\cdot\sin\dfrac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，$f_x'(0,0)=f_y'(0,0)=0$，故在点 $(0,0)$ 处，当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta f-[f_x'(0,0)\cdot\Delta x+f_y'(0,0)\cdot\Delta y]}{\rho}=\rho\sin\dfrac{1}{\rho^2}\to 0$，

所以，$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}f(0,0)=0$.

例子 $=o(r)$. (3)用在这里

例：再用第(3)条解题：

例 13.8 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的一个充分条件是(C).

(A) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$ ← 离谱

(B) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ ← 需偏导数连续（看三角图）

(C) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ ← r ⇒ 分子 $=o(r)$

(D) $\lim\limits_{\alpha\to0}[f'_x(\alpha,0)-f'_x(0,0)]=0$，且 $\lim\limits_{y\to0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$

$f'(x)$ ← 和 $x\to0$ 的 x 不同.

之前的⚠：关于 x,y 分别连续 推不出 二元连续.

偏导数连续：$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_x(\Delta x,\Delta y)-f'_x(0,0)\right)=0$

$\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left(f'_y(\Delta x,\Delta y)-f'_y(0,0)\right)=0$

三个容易出现的误解

(1) $f(x,y)$ 在某点邻域内存在偏导数

但在该点不一定连续，从而不一定可微.

(2) $f(x,y)$ 在某点连续，

但偏导数不一定存在，从而不一定可微.

(3) $f(x,y)$ 在某点可微，

但在该点偏导数不一定连续.

链式法则

1. 链式求导规则

建议写箭头

(1)复合函数的中间变量均为一元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-11 所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$, 则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$, 且 $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}$.

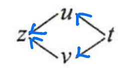


图 1-11-11

(2)复合函数的中间变量均为多元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-12 所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$, 则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

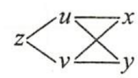


图 1-11-12

(3)复合函数的中间变量既有一元函数, 又有多元函数的情形. 复合结构图如图 1-11-13所示.

设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(y)$, 则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

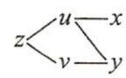


图 1-11-13

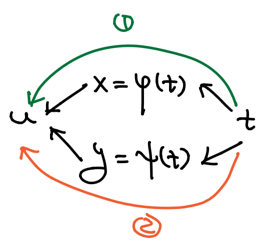
例1: $u=x^y$. 令 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$. 求 $\frac{du}{dt}$.

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\varphi'(t)+\frac{\partial u}{\partial y}\psi'(t) \quad ①+②$$

$$=y\cdot x^{y-1}\varphi'(t)+x^y\ln x\,\psi'(t)$$

$$=x^y\left(\frac{y}{x}\varphi'+\ln x\,\psi'\right)$$

$$=(\varphi(t))^{\psi(t)}\left(\frac{\psi(t)}{\varphi(t)}\varphi'(t)+[\ln\varphi(t)]\psi'(t)\right)$$



不能折头

⚠ 在使用链式法则时，要求 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，否则法则可能失效.

E.g. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$\Rightarrow f_x(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$f_y(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

证不可微: $\Delta f=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\frac{\Delta x^2\cdot\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不是高阶小量 $o(r)$.

现在令 $x=y=t$, 则 $f(t,t)=\frac{t}{2}\Rightarrow\frac{df}{dt}=\frac{1}{2}$.

如果用链式法则，就有

$$\frac{df}{dt} = f_x x_t' + f_y y_t' = f_x + f_y$$

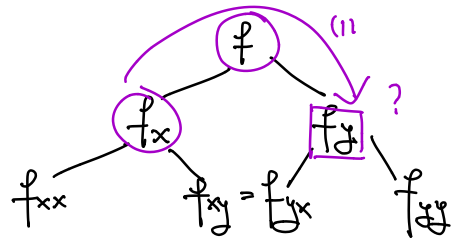
当 $(x,y)=(0,0)$ 时 $\frac{df}{dt}=0$，问题出在 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

与1/2矛盾.

例2：设 $f(x,y)$ 有连续偏导数且 $f(x,x^2)=1$.

(1) 若 $f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$.

(2) 若 $f_y(x,y)=x^2+2y$，求 $f(x,y)$.



(1) 对 $f(x,x^2)=1$ 两边求导得

不是 $f_x(x,y)$ 而是 $f_x(x,x^2)$

$$f_x (x)' + f_y (x^2)' = f_x + 2x f_y = 0$$

而 $f_x(x,x^2)=x$，故 $x+2x f_y(x,x^2)=0$

$$\Rightarrow f_y(x,x^2) = -\frac{1}{2} \quad \boxed{(x\neq 0)}$$

由连续性知 $f_y(x,x^2) = -\frac{1}{2}$ $(x=0)$.

(2) 将 f_y 的原函数视作 f 的一部分去还原 f.

令 $F(x,y)=f(x,y)-\underbrace{(x^2y+y^2)}_{f_y\text{的积分}}$

$\Rightarrow F_y = f_y-(x^2+2y)=0$ ← 构造F的目的是它成立.

$\Rightarrow$ F只与x有关，设 $F=\varphi(x)$

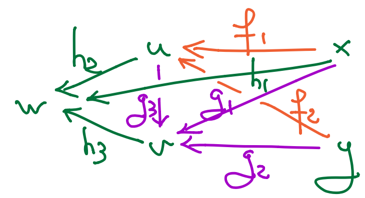
$\Rightarrow f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x)$.

利用 $f(x,x^2)=1$，得 $\varphi(x)=1-2x^4$

$\Rightarrow f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4$.

例3：$u=f(x,y)$，$v=g(x,y,w)$，$w=h(x,u,v)$. 求 $\frac{\partial w}{\partial x}$，$\frac{\partial w}{\partial y}$

先画图



每个字母只出现一遍.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = h_1 + h_2 f_1 + h_3(g_1 + g_3 f_1)$$

$$= h_1 + h_2 \frac{\partial f}{\partial x} + h_3\left(g_1 + g_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

只有一层才能写成这种形式.
而 e.g. $h_1 \neq \frac{\partial h}{\partial x}$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = h_2 f_2 + h_3(g_2 + f_2 g_3)$$

$$= h_2 \frac{\partial f}{\partial y} + h_3\left(g_2 + g_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

例4: 例 1.11.3 设 $z=f(e^x \sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

先关于x，后关于y

解

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x \sin y f_1' + 2x f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{11}'' e^{2x} \sin y \cos y + 2e^x(y \sin y + x \cos y) f_{12}'' + 4xy f_{22}'' + f_1' e^x \cos y.$$

例 1.11.4 设 $z = x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

先x后y

解

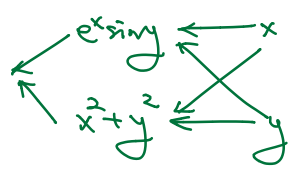
$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 f_1' + x^2 f_2',$$

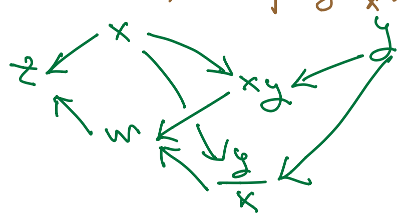
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4\left(x f_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}''\right) + x^2\left(x f_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}''\right) = x^5 f_{11}'' + 2x^3 f_{12}'' + x f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 4x^3 f_1' + x^4\left(y f_{11}'' - \frac{y}{x^2} f_{12}''\right) + 2x f_2' + x^2\left(y f_{21}'' - \frac{y}{x^2} f_{22}''\right)$$

$$= 4x^3 f_1' + 2x f_2' + x^4 y f_{11}'' - y f_{22}''.$$

$z = x^3 \cdot w$, $w = f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$

① 

② 

例5: 设 $a, b \neq 0$, f 有二阶连续偏导数, 且

$$a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad ①$$

$$f(ax, bx) = ax \qquad ②$$

$$f_x(ax, bx) = bx^2 \qquad ③$$

求 $f_{xx}(ax, bx)$, $f_{xy}(ax, bx)$, $f_{yy}(ax, bx)$.

对②两边求导得

$$a f_x(ax,bx) + b f_y(ax,bx) = a$$

对①③两边求导得

$$a f_{xx}(ax,bx) + b f_{xy}(ax,bx) = 2bx \qquad ④$$

$$a^2 f_{xx}(ax,bx) + 2ab f_{xy}(ax,bx) + b^2 f_{yy}(ax,bx)$$

结合①得 $f_{xy}(ax,bx) = 0$，将之代入④得

$$f_{xx}(ax,bx) = \frac{2b}{a}x,$$

再将之代入①得 $f_{yy}(ax,bx) = -\frac{2a}{b}x.$

隐函数存在定理与求导

(一)隐函数存在定理

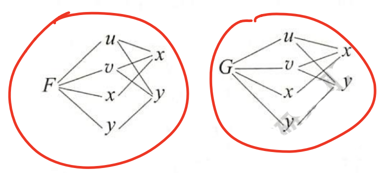
1. 一个方程的情形

设 $F(x,y,z)=0$，$P_0(x_0,y_0,z_0)$，若满足①$F(P_0)=0$；②$F'_z(P_0)\neq 0$，则在 P_0 的某邻域内可确定 $z=z(x,y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

2. 方程组的情形

设 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0.\end{cases}$ 若记 $\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$（以后同），当满足 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 时，可确定 $\begin{cases}u=u(x,y),\\v=v(x,y).\end{cases}$ 其复合结构图为



且有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}},\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}.$$

记不住的话
就要能看图写式子.

思想：视 $F(x,y)=0$ 为方程，x 为已知量，可解出 y 作为未知量.

1中： ① $F(P_0)=0$ ⤳ F 在 P_0 处满足方程.

② $F_x(P_0)\neq 0$ ⤳ 这一定是一个以 x 为已知量的方程

（若 $F_x=0$，则与 x 无关，意味着已知量 x 无处可用）.

2中： $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$ 可理解为：

F与u,v间的关联方式不能与G与u,v间的关联方式一样

（否则会导致方程相消，已知量u不能充分发挥作用，

这样就不足以解未知量v）.

(二)隐函数求导

例1：设 $z=f(x,y)$ 是由方程 $F(x-y,y-z)=0$ 确定的隐函数。

求 z_x, z_y, z_{xy}.

① 先求 z_x. 在 $F(x-y,y-z)=0$ 两侧对 x 求导，得

$$F_1 - z_x F_2 = 0 \Rightarrow z_x = \frac{F_1}{F_2}.$$

② 求 z_y. 可用公式 $z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{-F_1+F_2}{-F_2} = \frac{F_2-F_1}{F_2}$.

③ 求 z_{xy}.

在 $F_1 - z_x F_2 = 0$ 两边对 y 求导，得

$$-F_{11} + F_{12}(1-z_y) - \left((-F_{21}+F_{22}(1-z_y))z_x + F_2 z_{xy}\right) = 0$$

将 z_y, z_x 表达式代入，有

$$-F_{11} + F_{12}\cdot\frac{F_1}{F_2} - \left((-F_{21}+F_{22}\cdot\frac{F_1}{F_2})\cdot\frac{F_1}{F_2} + F_2 z_{xy}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow z_{xy} = \frac{1}{F_2^3}(2F_1F_2F_{12} - F_2^2F_{11} - F_1^2F_{22})$$

也可先在 $F-1-F_2+F_2z_y=0$ 两边对 x 求导，然后解出 z_{xy}.

(三)求已知函数组所确定的隐函数组之导数

例1：设 $u(x,y)$ 由方程组 $u=f(x,y,z,t)$，$g(y,z,t)=0$，$h(z,t)=0$ 确定。

且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$. 求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法1：先理清函数关系

因为 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0$,

$g(y,z,t)=0$, $h(z,t)=0$ $\rightsquigarrow$ z,t 为 y 的函数

$\Rightarrow$ u = 以 z,t 为中间变量的 x,y 的函数.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 + f_3 z'(y) + f_4 t'(y).$$

代入

对原方程关于 y 求导:

$$g_y + g_z z' + g_t t' = 0$$

$$h_z z' + h_t t' = 0$$

$$\Rightarrow \quad z' = -g_y h_t \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}, \quad t' = g_y h_z \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f_y - g_y (f_z h_t - f_t h_z) \left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.$$

解法2: 直接考虑方程组

$$F(x,y,z,t;u) = 0, \quad g(y,z,t) = 0, \quad h(z,t) = 0,$$

其中 $F(x,y,z,t,u) = u - f(x,y,z,t)$. 由于

$$\frac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)} = \frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ 可视 x, y 为自变量, u, z, t 为 x, y 之函数

对3个方程关于 y 求导: $u_y - f_y - f_z z_y - f_t t_y = 0$

$$g_y + g_z z_y + g_t t_y = 0$$

$$h_z z_y + h_t t_y = 0$$

解三个方程得到结果.

例2: 设 $x = \cos\varphi \cos\psi$, $y = \cos\varphi \sin\psi$, $z = \sin\varphi$. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解法1:

$$z \leftarrow \varphi \leftarrow x, \; y$$

前两个方程 $\Rightarrow \varphi = \varphi(x,y), \; \psi = \psi(x,y)$

$$\Rightarrow z = \sin\varphi = \sin\varphi(x,y).$$

$$\Rightarrow z_x = \cos\varphi \cdot \varphi_x$$

前两个方程对x求导

$$\rightsquigarrow \quad 1 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\cos\psi + \cos\varphi(-\sin\psi)\psi_x$$

$$0 = -\sin\varphi\cdot\varphi_x\sin\psi + \cos\varphi\cdot\cos\psi\cdot\psi_x.$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_x = -\cos\psi/\sin\varphi, \quad \psi_x = -\sin\psi/\cos\varphi.$$

代入 $z_x = \cos\varphi\cdot\varphi_x = -\cot\varphi\cdot\cos\psi$

对x求导 $\Rightarrow z_{xx} = \dfrac{\cos^2\varphi\sin^2\varphi - 1}{\sin^3\varphi}$.

解法2：找方程. 观察：$x^2+y^2+z^2=1$,

两边对x求两次导　　$(y, x$ 是独立变量$)$

$$x + z z_x = 0, \quad 1 + z_x^2 + z z_{xx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_x = -\frac{x}{z}.$$

$$z_{xx} = -\frac{z^2+x^2}{z^3} = \frac{y^2-1}{z^3} = \frac{\cos^2\varphi\sin^2\psi - 1}{\sin^3\varphi}.$$

例3: 设 $u = f(x-ut, y-ut, z-ut)$, $g(x,y,z)=0$. 试求 u_x, u_y.

这时t是自变量 or 因变量?

两个方程确定两个隐函数.

第一个是u. 第二个?　　$\Big\} \Rightarrow$ t是自变量.

由第二个方程，为z.

分别关于x求导得.

$$u_x = f_1(1-u_x t) + f_2(-u_x t) + f_3(z_x - u_x t)$$

$$g_1 + g_3 z_x = 0.$$

解此方程组得

$$u_x = \frac{f_1 + f_3\left(-\frac{g_1}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t}, \quad u_y = \frac{f_2 + f_3\left(-\frac{g_2}{g_3}\right)}{1+(f_1+f_2+f_3)t}.$$