$$-\int\left(\frac{3}{z-2}-\frac{2}{z-1}\right)dz$$

$$=\ln\frac{(z-1)^2}{|2-z|^3}=\ln|n|+C$$

$$\begin{cases} n=v+2=x^2+2 \\ z=\dfrac{m}{n}=\dfrac{u+1}{v+2}=\dfrac{y^2+1}{x^2+2} \end{cases}$$

$$\ln(x^2+2)+C=\ln(\cdots).$$

4. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2-7x}{3x^2y+2y^3-8y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{y\,dy}{x\,dx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$. 令 $u=y^2$, $v=x^2$

$\Rightarrow \dfrac{du}{dv}=\dfrac{2v+3u-7}{3v+2u-8}$. 设 $\begin{cases} 2v+3u-7=0 \\ 3v+2u-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$

令 $m=u-1$, $n=v-2$. 则

$\dfrac{dm}{dn}=\dfrac{2n+3m}{2m+3n}$. 令 $m=zn$.

$\Rightarrow$ 分离变量为 $\left(\dfrac{3+2z}{2-2z^2}\right)dz=\dfrac{dn}{n}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}\ln\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|-\dfrac{1}{2}\ln|1-z^2|=\ln n+C$

$\Rightarrow (x^2-y^2-1)^5=C(x^2+y^2-3)$.

一阶微分方程的求解

- 能写成 $y'=f(x)\cdot g(y)$ ← 分离变量
- 能写成 $y'=f(ax+by+c)$
- 能写成 $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 能写成 $\frac{1}{y'}=f\left(\frac{x}{y}\right)$

拟线性.

- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)$ ← 线性. 凑 $e^{\int p(x)dx}$
- 能写成 $y'+p(x)y=q(x)y^n$ $(n\neq 0,1)$(仅数学一) ← 拟线性

特别说明：伯努利方程

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (m \neq 0, 1)$$

① $y \neq 0$ 时，$\dfrac{y'}{y^m} + p(x)y^{1-m} = q(x)$.

令 $z = y^{1-m} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx} = (1-m)y^{-m} \cdot \dfrac{dy}{dx}$

$= (1-n)q(x) - (1-n)p(x)z$ 关于 z 线性.

② $y=0$ 也是方程的特解

高阶常微分方程

第一类：求齐次通解

例：$y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$ ← 齐次

⟶ 找特征方程

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0$$

$$= \lambda^3 + 2\lambda^2 - 4\lambda^2 - 8\lambda + 5\lambda + 10$$

$$= \lambda^2(\lambda+2) - 4\lambda(\lambda+2) + 5(\lambda+2)$$

$$= (\lambda^2 - 4\lambda + 5)(\lambda+2)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 2+i,\ \lambda_3 = 2-i$

$\Rightarrow$ 所求通解

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + C_3 e^{\lambda_3 x}$$

$$= C_1 e^{-2x} + C_2 e^{(2+i)x} + C_3 e^{(2-i)x}$$

写成含 $\cos x$, $\sin x$ 的式子

利用 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$（欧拉方程）

$$\cos x + i\sin x \qquad \cos x - i\sin x$$

$$\Rightarrow y = C_1 e^{-2x} + e^{2x}(C_2 e^{ix} + C_3 e^{-ix})$$

$$= C_1 e^{-2x} + e^{2x}(\tilde{C}_2 \cos x + \tilde{C}_3 \sin x)$$ 通解.

总结: ① 写出特征方程, 解特征值 λ_1 (k_1重), $\cdots$, λ_n (k_n重) ($\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 互异)

② 通解 $y = \underbrace{C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x\cdot e^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_1}\cdot x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x}}_{\lambda_1\text{部分}} + \underbrace{\cdots}_{\lambda_2,\cdots,\lambda_n\text{部分}}$.

e.g. $\lambda_1 = \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightsquigarrow y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$

第二类: 非齐次通解

非齐次通解 = 齐次通解 + 特解 (找特解是主要任务)

例: $2y'' - 4y' - 6y = 3e^{2x}$

① 先解齐次 $2y'' - 4y' - 6y = 0$

特征方程 $2\lambda^2 - 4\lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1$

$\Rightarrow y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$

② $e^{\alpha x}(a\sin x + b\cos x)$ 或 $e^{\alpha x}\cdot P(x)$ (P多项式)

判断其中 α 是 n 重左式的特征根.

$\rightsquigarrow$ 若为 n 重, 则特解形如 $A\cdot x^n\cdot e^{\alpha x}$ (A常数)

e^{2x} 中, 2 在左侧为 0 重 $\rightsquigarrow$ 特解 $y = Ae^{2x}$.

③ 解出特解中的待定系数.

$2y'' = 2\cdot(2Ae^{2x})' = 8A\cdot e^{2x}$

$-4y' = -4\cdot 2Ae^{2x} = -8Ae^{2x}$

$\Rightarrow -6y = -6Ae^{2x} = 3e^{2x} \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$

④ 通解 = 齐次通解 + 特解

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^{2x}$.

总结：特解的长相.

(1) 右式 $= e^{\alpha x}\cdot P(x)$，P为多项式

特解 $= Ax^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$. $n=\alpha$在左侧式子中的重数.

Q(x)：首一多项式(最高次项系数为1)，次数与P相同.

e.g. $P=2x^3+5x^2+3$，$Q=x^3+mx^2+nx+r$

或 特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}\cdot Q(x)$. Q(x)次数与P(x)相同.

(2) 右式 $= e^{\alpha x}(m\sin\beta x+n\cos\beta x)$

特解 $= x^n\cdot e^{\alpha x}(a\sin\beta x+b\cos\beta x)$，$n=\alpha\pm\beta i$在左侧式子中的重数

右式分多项.

习题：1. $y''+2y'=3+4\sin 2x$ ← 每一项分别求特解，再相加.

齐次方程 $y''+2y'=0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda=(\lambda+2)\lambda=0$，$\lambda_1=0$，$\lambda_2=-2$.

$\Rightarrow \tilde{y}=C_1+C_2e^{-2x}$ 为通解.

① 3对应特解

$3=3\cdot e^{0x}$，0为1重根.

⇝ 特解 $Ax^1\cdot e^{0x}=Ax$ $(P(x)=3,\ Q(x)=A)$

② $4\sin 2x$对应特解

$4\sin 2x=e^{0x}(4\sin 2x)$. $\alpha\pm\beta i=\pm 2i$ 不是解 $\Rightarrow n=0$

⇝ 特解 $x^0\cdot e^{0x}\cdot(m\sin 2x+n\cos 2x)=m\sin 2x+n\cos 2x$

①② ⇒ 特解 $y=Ax+m\sin 2x+n\cos 2x$

待定系数法 $A=3/2$，$m=n=-1/2$.

通解 $y=C_1+C_2e^{-2x}+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x$

2. $y^{(4)}+2y''+y=\sin x$

特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=i$，$\lambda_3=\lambda_4=-i$.

齐次通解 $\tilde{y} = C_1 e^{ix} + C_2 x e^{ix} + C_3 e^{-ix} + C_4 x e^{-ix}$

右式 $= \sin x = e^{0x} \cdot \sin x$， $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$

i 和 $-i$ 均为二重特征根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{ix}(A\sin x + B\cos x) + x^2 \cdot e^{-ix}(C\sin x + D\cos x)$

......

3. (yyh) $y'' - 6y' + 9y = xe^{3x} + e^{3x}\cos x$.

特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 3$

$\rightsquigarrow$ 齐次通解 $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

① 关于 xe^{3x} 的特解

$\alpha = 3$ 为二重根 $\Rightarrow$ 特解 $= x^2 \cdot e^{3x} \cdot (mx + n) = (mx^3 + nx^2) e^{3x}$

$\Rightarrow y' = 3e^{3x}(mx^3 + nx^2) + (3mx^2 + 2nx) \cdot e^{3x} = e^{3x}(3mx^3 + (3n + 3m)x^2 + 2nx)$

$y'' = 3e^{3x}(3mx^3 + (3n + 3m)x^2 + 2nx) + e^{3x}(9mx^2 + (6m + 6n)x + 2n)$

$\rightsquigarrow y'' - 6y' + 9y = e^{3x}(9mx^3 + (18m + 9n)x^2 + (6m + 12n)x + 2n)$

$- 6e^{3x}(3mx^3 + (3n + 3m)x^2 + 2nx) + 9e^{3x}(mx^3 + nx^2)$

$= 6mxe^{3x} =$ 右式第一部分 $= xe^{3x}$

$\Rightarrow n = 0,\ m = 1/6$.

$\rightsquigarrow$ 特解 $= \frac{1}{6} x^3 e^{3x}$.

② 关于 $e^{3x}\cos x$ 的特解

$\alpha \pm \beta i = 3 \pm i$ 不是根

$\Rightarrow$ 特解 $= x^0 \cdot e^{3x} \cdot (A\sin x + B\cos x) = Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x$

$\Rightarrow y'' - 6y' + 9y = 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + 6(-Ae^{3x}\sin x + Be^{3x}\cos x)$

$- (Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) - 6[3(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x) + (-Ae^{3x}\sin x$

$+ Be^{3x}\cos x)] + 9(Ae^{3x}\cos x + Be^{3x}\sin x)$

$= (9A + 6B - A - 18A - 6B + 9A)e^{3x}\cos x$

$$+(9B-6A-B-18B+6A+9B)e^{3x}\sin x$$

$$=-Ae^{3x}\cos x-Be^{3x}\sin x$$

$$=\text{右式第二项}=e^{3x}\cos x \Rightarrow A=-1,\ B=0.$$

最终通解 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{1}{6}x^3e^{3x}-e^{3x}\cos x.$

变形：欧拉方程 （不是 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$）

$$x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x\cdot y'+a_n\cdot y=0$$

只须换一次元，转化为常规形式

换法：

3. 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$(仅数学一)

① 当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$，则 $t=\ln x,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2},$$

方程化为 $$\frac{d^2y}{dt^2}+(p-1)\frac{dy}{dt}+qy=f(e^t),$$

即可求解(别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数).

② 当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$，同理可得.

例：$x^2y''+5xy'+13y=0 \quad (x>0)$

令 $x=e^t \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y'\cdot e^t=xy'$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d(xy')}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot y'+\left(\frac{dy'}{dt}\right)\cdot x=xy'+x^2y''$$

$$\frac{dy'}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y''\cdot x$$

$\rightsquigarrow$ 原式左侧 $=\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+13y=0$

特征方程 $\lambda^2+4\lambda+13=0 \Rightarrow \lambda_1=-2+3i,\ \lambda_2=-2-3i$

$$\Rightarrow \text{通解 } y=C_1e^{(-2+3i)t}+C_2e^{(-2-3i)t}=C_1x^{-2+3i}+C_2x^{-2-3i}$$

$$=e^{-2t}(C_1(\cos3t+i\sin3t)+C_2(\cos3t-i\sin3t))$$

$$=e^{-2t}(\tilde{C}_1\cos3t+\tilde{C}_2\sin3t)$$

$$=\frac{1}{x^2}(\tilde{C}_1\cos(\ln x^3)+\tilde{C}_2\sin(\ln x^3))$$

二、二阶可降阶微分方程的求解(仅数学一、数学二)

若是"y''",则

1. 能写成 $y''=f(x,y')$ 缺y

① 缺 y,令 $y'=p$,$y''=p'\Rightarrow$ 原方程变为一阶方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(x,C_1)$,即 $y'=\varphi(x,C_1)$,则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2.$$

见例 15.9.

2. 能写成 $y''=f(y,y')$ 缺x

① 缺 x,令 $y'=p$,$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$,则原方程变为一阶方程 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$;

② 若求得其解为 $p=\varphi(y,C_1)$,则由 $p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$,分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$;

③ 两边积分得 $\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$,即可求得原方程的通解.