# 有理函数的积分

## 理论

① 多项式在实数域可分解为不高于2次因式的乘积.

$\Downarrow$ (即:任何高于2次的式子一定能被继续分解).

② 真分式(分母次数比分子高)

一定可以分解为两种简单分式之线性组合

$$\frac{C}{(x-a)^k}\ (k\geq 1),\quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geq 1)$$ (分解为二者的方式是唯一)

③ 非真分式可以化为真分式

e.g. $\frac{x^2}{1-x}=\frac{x^2-1+1}{1-x}=\underbrace{-(1+x)}_{\text{多项式(可直接积)}}+\underbrace{\frac{1}{1-x}}_{\text{真分式}}$

例: $I=\int\frac{x^2}{1+x}dx=\int\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$

$=\int(x-1)dx+\int\frac{1}{1+x}dx=\frac{x^2}{2}-x+\ln|1+x|+C.$

## 分母全为一次

例: $I=\int\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2}dx$

想 $\frac{C}{(x-a)^k}$, 对于 $x+1$: $k=1$

对于 $2x+1$: $k=1,2$.

$=\int\left(\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{2x+1}+\frac{C_3}{(2x+1)^2}\right)dx$

待定系数法: ①展开,比较各幂次系数

② 利用极限.

同乘最高次

(i) 同乘 $x+1$, 令 $x\to -1$

$\rightsquigarrow$ 右式 $=C_1$, 左式 = 将 $x=-1$ 代入 $\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)^2}=1\Rightarrow C_1=1$

(ii) 同乘 $(2x+1)^2$, 令 $x\to -1/2$.

$\rightsquigarrow$ 左式 $=\left.\frac{2x^2+3x+2}{x+1}\right|_{x=-1/2}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+2}{\frac{1}{2}}=2$

右式 $=C_3$

$\Rightarrow C_3=2.$

(iii) 最后处理非最高次项 (随缘)

令x=特殊值 或 令 $x\to\pm\infty$.

⇝ 令$x=0$, 左式$=2$, 右式$=C_1+C_2+C_3 \Rightarrow C_2=-1$

或 同乘$x$, 令$x\to+\infty$, $\frac{1}{2}=C_1+\frac{1}{2}C_2 \Rightarrow C_2=-1$.

总之, $I=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{2x+1}+\frac{2}{(2x+1)^2}\right)dx$

$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{2x+1}+C.$$

分母有二次不可约式

例: $I=\int\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}dx$

分解: $\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{C_1}{x-1}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}$

待定系数法: (i) 同乘$x-1$, 令$x\to1 \Rightarrow C_1=-1$.

(ii) 问题: 二次式无根.

先相减, 再代入复根 会便于计算.

移项相减: $\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}+\frac{1}{x-1}$

$$=\frac{-5x^2-4+(x^2+2)^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^4-x^2}{(x-1)(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_1x+N_1}{x^2+2}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}$$

同乘$(x^2+2)^2$, 令$x\to i\sqrt{2}$

$$\Rightarrow M_2\cdot i\sqrt{2}+N_2=-2\cdot(i\sqrt{2}+1)=-2\sqrt{2}i-2$$

$$\Rightarrow M_2=N_2=-2$$ (一次求两个)

(iii) 再减一次

$$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}+\frac{2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x^3+x^2+2x+2}{(x^2+2)^2}=\frac{x(x^2+2)+(x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{x+1}{x^2+2}$$

$$\Rightarrow M_1=N_1=1.$$

总之, $I=\int\left(\frac{-1}{x-1}-\frac{2x-2}{x^2+2}+\frac{x+1}{(x^2+2)^2}\right)dx$

$$= -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

其中 $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+2)^2}\,dx = \int \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$

$$= \frac{-1}{2(x^2+2)} + \int \frac{1}{(x^2+2)^2}\,dx$$

先求 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+2}$，再用分部积分升次数

$$\int \frac{dx}{x^2+2} = \frac{x}{x^2+2} + \int \frac{2x^2}{(x^2+2)^2}\,dx$$

$$= \frac{x}{x^2+2} + 2\int \frac{dx}{x^2+2} - 4\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

最终，$\displaystyle I = -\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2(x^2+2)}$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

下一步目标：$\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$.

$x^2+px+q$ 不可约，$\Delta = p^2-4q<0$.

⇝ 配方：$(x-x_0)^2+a^2 = x^2+px+q$，$dx = d(x-x_0)$

原式转化为 $\displaystyle I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ $(a>0)$.

计算 $I_n$ 的两种方法.

(一) 递推法，分部降次

乘1后作分部积分.

$$I_{n-1} = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} - \int x\cdot(1-n)\cdot(x^2+a^2)^{-n}\cdot 2x\cdot dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int \frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

分子要出现分母的形式

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)\cdot a^2 I_n.$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}I_{n-1}$$

不加C.

<u>回顾</u> 先猜形式，再待定系数

$$\int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax}{x^2+2} + \lambda\int\frac{dx}{x^2+2}$$

两边求导得到 $\frac{1}{(x^2+2)^2} = \frac{A(x^2+2)-2x\cdot Ax}{(x^2+2)^2} + \lambda\cdot\frac{1}{x^2+2}$

$$= \frac{A}{x^2+2} - \frac{2Ax^2}{(x^2+2)^2} + \frac{\lambda}{x^2+2}$$

$$= \frac{(A+\lambda)(x^2+2)-2Ax^2}{(x^2+2)^2}$$

$\Rightarrow \lambda - A = 0,\ 2(A+\lambda)=1 \Rightarrow \lambda = A = \frac{1}{4}.$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x^2+2}.$$

$$= \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

(二) 三角代换法.

在 $I_n = \int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ 中，令 $x = a\tan t$

则 $dx = a\sec^2 t\,dt$.

递推公式求解

$$\Rightarrow I_n = \int\frac{a\cdot\sec^2 t\,dt}{a^{2n}\cdot\sec^{2n}t} = \frac{1}{a^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}t\,dt$$

应用: $\int\frac{dx}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\cos^2 t\,dt$

一个难算的不定积分

例: $I = \int\frac{dx}{1+x^4}$

解法一: 分母因式分解 (高于2次就可分)

$$x^4+1 = (x^4+2x^2+1)-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2$$

$$= (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).$$

$\Rightarrow$ 部分因式分解

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

待定系数找 $M_1, N_1, M_2, N_2$：直接代入 $x$ 值

zsy是憨包

令 $x=0$，左式 $=1$，右式 $=N_1+N_2$

同乘 $x$，令 $x\to+\infty$，左式 $=0$，右式 $=M_1+M_2$

令 $x=i$，左式 $=\frac{1}{2}$，右式 $=\frac{M_1 i+N_1}{\sqrt{2}i}+\frac{M_2 i+N_2}{-\sqrt{2}i}=\frac{(M_1-M_2)i+(N_1-N_2)}{\sqrt{2}i}$

$\Rightarrow M_1-M_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ N_1-N_2=0.$

$\Rightarrow N_1=N_2=\frac{1}{2},\ M_1=\frac{\sqrt{2}}{4},\ M_2=-\frac{\sqrt{2}}{4}.$

$$\rightsquigarrow I=\int\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}dx+\int\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}dx$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1)$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C.$$

解法二：配凑法

$$I=\int\frac{dx}{1+x^4}=\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{x^4+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

记住：$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$