有理三角函数积分

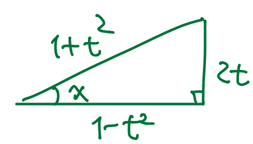
形如 $I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$，R分子分母均为二元多项式

核心：万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$.

目的：将其转化为有理积分（三角到代数的）.

万能代换有效的原因：

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\overbrace{\cos^2\frac{x}{2}}^{\frac{1}{1+\tan^2\frac{x}{2}}} = \frac{2t}{1+t^2}$$



$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$dx = d(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

$$\Rightarrow I=\int R(\cos x,\sin x)\,dx$$
$$=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例：$I=\int\frac{dx}{\sin x}$ （用万能公式）

令 $t=\tan\frac{x}{2}$，则

$$I=\int\frac{1+t^2}{2t}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

另法：同乘 $\sin x$

或利用半角公式：

$$I=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int\frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}$$
$$=\int\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

例：（泊松积分）$I=\int\frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$ $(0\le r<1)$

万能代换 $t=\tan\frac{\theta}{2}$.

$$I=\int \frac{1}{1-2r\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}+r^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}$$

$$=\int\frac{2dt}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}=\frac{2}{(1+r)^2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{(1+r)^2}\cdot\frac{1+r}{1-r}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}t\right)+C$$

$$=\frac{2}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C$$

万能代换缺点：分母 $1+t^2$ 次数较高，计算复杂.

以下情况不用万能代换：

① $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\cos x$

($将 \sin x\,dx$ 化为 $d(-\cos x)=-d(\cos x)$)　　特例：$R(\cos x)\cdot\sin x$

② $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\sin x$　　特例：$R(\sin x)\cdot\cos x$

③ $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$，令 $t=\tan x$.　　特例：$R(\tan x)$

例：$I=\int\frac{dx}{a+b\tan x}$　$(b\neq 0)$　　$dt=\frac{dx}{\cos^2x}=(1+\tan^2x)\,dx=(1+t^2)\,dx$

令 $t=\tan x \Rightarrow I=\int\frac{dt}{(1+t^2)(a+bt)}$

$\Rightarrow I=\int\left(\frac{Mt+N}{1+t^2}+\frac{c}{a+bt}\right)dt$

待定系数：(i) 同乘 $a+bt$，令 $t\to-\frac{a}{b}$，

右式 $=c$，左式 $=\frac{b^2}{b^2+a^2}$

(ii) 移项计算

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}-\frac{b^2}{b^2+a^2}\cdot\frac{1}{a+bt}=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\left(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}(1+t^2)\right)$$

$$=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\cdot\frac{1}{a^2+b^2}(a^2-b^2t^2)=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a-bt}{a^2+b^2}=\frac{Mt+N}{1+t^2}$$

$$I = \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt| - \frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2) + \frac{a}{a^2+b^2}\arctan t + C$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right| + \frac{ax}{a^2+b^2} + C$$

$$= \frac{ax}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\cos x + b\sin x| + C.$$

另解:配对法

$$I = \int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}\,dx \quad , \text{设 } J = \int \frac{\sin x}{a\cos x + b\sin x}\,dx$$

$$\Rightarrow I = A\int \frac{-a\sin x + b\cos x}{a\cos x + b\sin x}\,dx + B\int \frac{a\cos x + b\sin x}{a\cos x + b\sin x}\,dx$$

$$= A\ln|a\cos x + b\sin x| + Bx + C$$

其中 $Ab + Ba = 1$, $-Aa + Bb = 0$

$$\Rightarrow A = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad B = \frac{a}{a^2+b^2}$$