Ravi代换

<u>定理1</u> $\triangle ABC$，R=外接圆半径，r=内切圆半径.

则 $R \geqslant 2r$，"$=$" $\Longleftrightarrow$ $\triangle ABC$ 等边.

<u>证明</u> $a=BC$，$b=CA$，$c=AB$.

$\rightsquigarrow$ $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，$S=[ABC]$.

（$[P]$ = 多边形 P 的面积）.

回顾基础结论：$S=rs$，$S=\frac{abc}{4R}$.

$$S^2=s(s-a)(s-b)(s-c) \quad \text{(Heron 公式)}$$

则 $R \geqslant 2r \Longleftrightarrow \frac{abc}{4S} \geqslant 2\frac{S}{s}$

$$\Longleftrightarrow abc \geqslant 8\frac{S^2}{s}=8(s-a)(s-b)(s-c).$$

所以转化为证明

<u>引理</u> 若 a,b,c 为三角形三边，则

$$abc \geqslant 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\Longleftrightarrow abc \geqslant (b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

<u>且</u> "$=$" $\Longleftrightarrow a=b=c$.

<u>证明</u> （Ravi代换）$\exists\, x,y,z>0$ s.t.

$$a=y+z,\ b=z+x,\ c=x+y$$

原式 $\Longleftrightarrow (y+z)(z+x)(x+y) \geqslant 8xyz$，$x,y,z>0$

$\underset{\text{(配方)}}{\Longleftrightarrow}$ $(y+z)(z+x)(x+y)-8xyz$

$$=x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2 \geqslant 0. \qquad \square$$

这就证明了定理1. $\square$

<u>练习</u> 设 $\triangle ABC$ 直角三角形，证明 $R \geqslant (1+\sqrt{2})r$.

实际上，引理不仅对 a,b,c 作为 $\triangle ABC$ 三边成立：

<u>定理2</u> $x,y,z>0$，则

$$xyz \geq (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z),$$

且 "=" $\Longleftrightarrow$ $x=y=z$.

<u>证明</u> 可设 $x \geq y \geq z$，则

$$x+y>z,\quad z+x>y,\quad y+z \text{ 与 } x \text{ 不确定}$$

(1) 若 $y+z>x$：x,y,z 是三角形三边，已证。

(2) 若 $y+z \leq x$：$xyz>0 \geq RHS$. $\square$

~~再~~推广至 $x,y,z \geq 0$ 情形也成立：

<u>检验</u> $x,y,z \geq 0 \Rightarrow \exists\, x_n, y_n, z_n > 0$ s.t.

$$x=\lim_{n\to\infty} x_n,\quad y=\lim_{n\to\infty} y_n,\quad z=\lim_{n\to\infty} z_n.$$

定理2 $\Rightarrow$ $x_n y_n z_n \geq \prod_{cyc}(y_n+z_n-x_n)$

取极限即得结论. $\square$

<u>注意</u> $x,y,z \geq 0$，$xyz=\prod_{cyc}(y+z-x) \not\Rightarrow x=y=z$.

事实上，等号成立 $\Longleftrightarrow$ $x=y=z$ 或

$$x=y,\ z=0 \text{ 或 } x=z,\ y=0 \text{ 或 } y=z,\ x=0,$$

原因：$xyz-\prod_{cyc}(y+z-x)=\sum_{cyc} x(x-y)(x-z)$.

<u>强定理</u> $x,y,z \geq 0$，则

$$xyz \geq \prod_{cyc}(x+y-z)$$

且 "=" $\Longleftrightarrow$ $x=y=z$ 或 $x=y,\ z=0$ 或 $x=z,\ y=0$ 或 $y=z,\ x=0$,

<u>讨论</u> Ravi 代换的意义：

自然地处理 a,b,c 为三角形三边 这一条件.

上面结论是Schur不等式的特例：

例1 (IMO 2000, P2) $a,b,c>0$，$abc=1$，证明
$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

解答 $abc=1 \Rightarrow$ 做代换 $a=\frac{x}{y}$, $b=\frac{y}{z}$, $c=\frac{z}{x}$，$x,y,z>0$.

原式 $\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right)\le 1$

$\Leftrightarrow xyz \ge \prod_{cyc}(x+y-z)$. □

例2 (IMO 1983, P6) 设a,b,c是$\triangle ABC$三边长，证明
$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

解答 $a=y+z$，$b=z+x$，$c=x+y$. $x,y,z>0$

原式 $\Leftrightarrow x^3z+y^3x+z^3y \ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}\ge x+y+z$.

这是Cauchy-Schwarz：

$(y+z+x)\cdot \mathrm{LHS} \ge (x+y+z)^2$. □

练习 设a,b,c是$\triangle ABC$三边长，

(1) 证明： $$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2.$$

(2) 证明： $$a^3+b^3+c^3+3abc-2b^2a-2c^2b-2a^2c\ge 0$$

和 $$3a^2b+3b^2c+3c^2a-3abc-2b^2a-2c^2b-2a^2c\ge 0.$$

例3 (IMO 1961, P2, Weitzenböck)

设 a,b,c为$\triangle ABC$三边，$S=[\triangle ABC]$.

证明： $$a^2+b^2+c^2\ge 4\sqrt{3}S.$$

解答 $a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y,\quad x,y,z>0$,

原式 $\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}(x+y)^2\right)^2 \geq 48(x+y+z)xyz$.

$\left(S = s(s-a)(s-b)(s-c),\ s=\frac{1}{2}(a+b+c)\right)$.

$\Leftarrow \left(\sum_{cyc}(x+y)^2\right)^2 \geq 16(yz+zx+xy)^2 \qquad (p^2+q^2\geq 2pq)$

$\geq 16\cdot 3(xy\cdot zx + yz\cdot zx + xy\cdot yz)$

$\left((p+q+r)^2 \geq 3(pq+qr+rp)\right)$. □

定理3 (Hadwiger-Finsler) 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边, $S=[\triangle ABC]$.

则 $2ab+2bc+2ca-(a^2+b^2+c^2)\geq 4\sqrt{3}S$.

证法一 (Ravi 代换) $a=y+z,\ b=x+z,\ c=x+y,\quad x,y,z>0$.

原式 $\Leftrightarrow xy+yz+zx \geq \sqrt{3xyz(x+y+z)}$.

$\Leftrightarrow (xy+yz+zx)^2 - 3xyz(x+y+z)$

$= \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}(xy-yz)^2\right) \geq 0$. □

证法二 (凸性) 利用各种三角变换可得

$$\frac{1}{4S}\left(\left(\sum_{cyc}2ab\right)-(a^2+b^2+c^2)\right) = \tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}.$$

而 $\tan x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 凸,

Jensen $\Rightarrow$ RHS $\geq 3\tan\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{A+B+C}{2}\right) = \sqrt{3}$. □

定理4 (Tsintsifas) $p,q,r>0$, a,b,c 为 $\triangle ABC$ 三边, $S=[\triangle ABC]$.

则 $\frac{p}{q+r}a^2 + \frac{q}{r+p}b^2 + \frac{r}{p+q}c^2 \geq 2\sqrt{3}S$.

证明 定理3 $\Rightarrow$ 只须证 LHS $\geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)$

$\Leftrightarrow \frac{p+q+r}{q+r}a^2 + \frac{p+q+r}{r+p}b^2 + \frac{p+q+r}{p+q}c^2 \geq \frac{1}{2}(a+b+c)^2$

$\Leftrightarrow \left((q+r)+(r+p)+(p+q)\right)\left(\frac{a^2}{q+r}+\frac{b^2}{r+p}+\frac{c^2}{p+q}\right) \geq (a+b+c)^2$. □

这是 Cauchy-Schwarz.

定理5 (Neuberg-Pedoe) 设 a_1, b_1, c_1 和 a_2, b_2, c_2 分别为 $\triangle A_1B_1C_1$, $\triangle A_2B_2C_2$ 三边.

$F_1=[\triangle A_1B_1C_1]$, $F_2=[\triangle A_2B_2C_2]$. 则

$$a_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+b_1^2(c_2^2+a_2^2-b_2^2)+c_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)\ge 16F_1F_2.$$

(注意到这是前面几个定理的推广.)

引理 $a_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)+b_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+c_1^2(c_2^2+a_2^2-b_2^2)>0$.

证明 原式 $\Leftrightarrow (a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)>2(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2)$

Heron $\Rightarrow$ 对 $i=1,2$,

$$16F_i^2=(a_i^2+b_i^2+c_i^2)^2-2(a_i^4+b_i^4+c_i^4)>0$$

或 $a_i^2+b_i^2+c_i^2>\sqrt{2(a_i^4+b_i^4+c_i^4)}$.

用 Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)&>2\sqrt{(a_1^4+b_1^4+c_1^4)(a_2^4+b_2^4+c_2^4)}\\&>2(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2).\end{aligned}$$ □

下面证明定理5:

证法一 引理 $\Rightarrow L=a_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+b_1^2(c_2^2+a_2^2-b_2^2)+c_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)>0$

往证 $L^2-(16F_1^2)(16F_2^2)\ge 0$.

$\quad = -4(UV+VW+WU)$,

$U=b_1^2c_2^2-b_2^2c_1^2$, $V=c_1^2a_2^2-c_2^2a_1^2$, $W=a_1^2b_2^2-a_2^2b_1^2$.

有 $a_1^2U+b_1^2V+c_1^2W=0 \Leftrightarrow W=-\frac{a_1^2}{c_1^2}U-\frac{b_1^2}{c_1^2}V$

$$\begin{aligned}\Rightarrow UV+VW+WU&=-\frac{a_1^2}{c_1^2}\left(U-\frac{c_1^2-a_1^2-b_1^2}{2a_1^2}V\right)^2-\frac{4a_1^2b_1^2-(c_1^2-a_1^2-b_1^2)^2}{4a_1^2c_1^2}V^2\\&=-\frac{a_1^2}{c_1^2}\left(U-\frac{c_1^2-a_1^2-b_1^2}{2a_1^2}V\right)^2-\frac{16F_1^2}{4a_1^2c_1^2}V^2\le 0\end{aligned}$$ □

这定理5可以被下列讨论推出:

$a_1,\cdots,a_n,\ b_1,\cdots,b_n>0$, 且

$$a_1^2\ge a_2^2+\cdots+a_n^2,\quad b_1^2\ge b_2^2+\cdots+b_n^2.$$

則 $a_1b_1-(a_2b_2+\cdots+a_nb_n)\geq\sqrt{(a_1^2-(a_2^2+\cdots+a_n^2))(b_1^2-(b_2^2+\cdots+b_n^2))}$.

<u>证明</u> Cauchy-Schwarz ⇒ $a_1b_1\geq\sqrt{(a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_2^2+\cdots+b_n^2)}$

$$\geq a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

原式 $\Longleftrightarrow (a_1b_1-(a_2b_2+\cdots+a_nb_n))^2$

$$\geq(a_1^2-(a_2^2+\cdots+a_n^2))(b_1^2-(b_2^2+\cdots+b_n^2))$$

(1) $a_1^2=a_2^2+\cdots+a_n^2$：平凡.

(2) $a_1^2>a_2^2+\cdots+a_n^2$，取

$$P(x)=(a_1x-b_1)^2-\sum_{i=2}^{n}(a_ix-b_i)^2$$
$$=(a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2)x^2+2(a_1b_1-\sum_{i=2}^{n}a_ib_i)x+(b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{而 } P\left(\frac{b_1}{a_1}\right)=-\sum_{i=2}^{n}\left(a_i\left(\frac{b_1}{a_1}\right)-b_i\right)^2\leq 0\\ \text{二次项系数}>0\end{array}\right\}\Rightarrow P\text{有至少一个实根}$$

$$\Rightarrow\ \Delta=\mathrm{disc}(P)\geq 0$$
$$\Longleftrightarrow\left(2\left(a_1b_1-\sum_{i=2}^{n}a_ib_i\right)\right)^2-4\left(a_1^2-\sum_{i=2}^{n}a_i^2\right)\left(b_1^2-\sum_{i=2}^{n}b_i^2\right)\geq 0.\qquad\square$$

<u>定理5证法二</u>：原式 $\Longleftrightarrow(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)-2(a_1^2a_2^2+b_1^2b_2^2+c_1^2c_2^2)$

$$\geq\sqrt{((a_1^2+b_1^2+c_1^2)^2-2(a_1^4+b_1^4+c_1^4))\cdot((a_2^2+b_2^2+c_2^2)^2-2(a_2^4+b_2^4+c_2^4))}$$

引入下列代换

$x_1=a_1^2+b_1^2+c_1^2$，$x_2=\sqrt{2}a_1^2$，$x_3=\sqrt{2}b_1^2$，$x_4=\sqrt{2}c_1^2$.

$y_1=a_2^2+b_2^2+c_2^2$，$y_2=\sqrt{2}a_2^2$，$y_3=\sqrt{2}b_2^2$，$y_4=\sqrt{2}c_2^2$.

引理 ⇒ $x_1^2>x_2^2+x_3^2+x_4^2$，$y_1^2>y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

以上结论 ⇒ $x_1y_1-x_2y_2-x_3y_3-x_4y_4$

$$\geq\sqrt{(x_1^2-(x_2^2+x_3^2+x_4^2))\cdot(y_1^2-(y_2^2+y_3^2+y_4^2))}.\qquad\square$$

下面一种证法更为巧妙：

证法三 $\triangle A_1B_1C_1$: $A_1(0,p_1)$, $B_1(p_2,0)$, $C_1(p_3,0)$

$\triangle A_2B_2C_2$: $A_2(0,q_1)$, $B_2(q_2,0)$, $C_2(q_3,0)$.

由 $x^2+y^2\geqslant 2|xy|$, 有

$$
\begin{aligned}
&a_1^2(b_2^2+c_2^2-a_2^2)+b_1^2(c_2^2+a_2^2-b_2^2)+c_1^2(a_2^2+b_2^2-c_2^2)\\
&=(p_3-p_2)^2(2q_1^2+2q_1q_2)+(p_1^2+p_3^2)(2q_2^2-2q_2q_3)\\
&\qquad+(p_1^2+p_2^2)(2q_3^2-2q_2q_3)\\
&=2(p_3-p_2)^2q_1^2+2(q_3-q_2)^2p_1^2+2(p_3q_2-p_2q_3)^2\\
&\geqslant 2((p_3-p_2)q_1)^2+2((q_3-q_2)p_1)^2\\
&\geqslant 4|(p_3-p_2)q_1|\cdot|(q_3-q_2)p_1|\\
&=16F_1\cdot F_2.
\end{aligned}
$$

□

讨论 几何不等式的本质在于找到好的"几何解释".