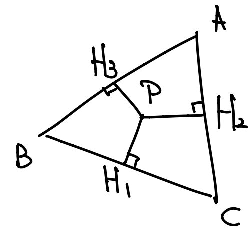
三角化方法



定理1 (Erdös-Mordell)

P是$\triangle ABC$内一点, PH_i为垂线.

则 $PA+PB+PC \geq 2(PH_1+PH_2+PH_3)$.

证明 $h_i = PH_i$. 由正、余弦定理:

$$PA\sin A = \overline{H_2H_3} = \sqrt{h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(\pi-A)}$$

$$PB\sin B = \overline{H_1H_3} = \sqrt{h_1^2+h_3^2-2h_1h_3\cos(\pi-B)}$$

$$PC\sin C = \overline{H_1H_2} = \sqrt{h_1^2+h_2^2-2h_1h_2\cos(\pi-C)}.$$

往证 $\sum_{cyc}\frac{1}{\sin A}\sqrt{h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(\pi-A)} \geq 2(h_1+h_2+h_3)$.

分析: 主要障碍在于左式根号和.

解决方案: 找$\sqrt{\cdots}$的下界, 以无根号形式表出. $\rightsquigarrow$ 二平方和.

$$\begin{aligned}
\overline{H_2H_3}^2 &= h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(\pi-A)\\
&= h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(B+C)\\
&= h_2^2+h_3^2-2h_2h_3(\cos B\cos C-\sin B\sin C)\\
&= (h_2\sin C+h_3\sin B)^2+(h_2\cos C-h_3\cos B)^2.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \overline{H_2H_3} \geq h_2\sin C+h_3\sin B.$

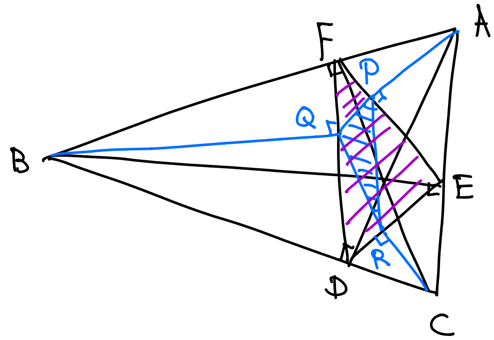
$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{\sin A}\sqrt{h_2^2+h_3^2-2h_2h_3\cos(\pi-A)} &\geq \sum_{cyc}\frac{h_2\sin C+h_3\sin B}{\sin A}\\
&= \sum_{cyc}\left(\frac{\sin B}{\sin C}+\frac{\sin C}{\sin B}\right)h_2\\
&\geq \sum_{cyc}2\sqrt{\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin C}{\sin B}}\cdot h_2\\
&= 2(h_1+h_2+h_3).
\end{aligned}$$

$\square$

可以利用同样的技术证明例1.

记号: $p(T)$ = 三角形T的周长.

例1 (IMO Shortlist 2005)



D、E、F、P、Q、R 分别是 A、B、C、A、B、C 相对于 BC、CA、AB、EF、FD、DE 的垂足.

求证: $\rho(ABC)\cdot\rho(PQR) \geq \rho(DEF)^2$.

解答 ρ = △ABC 外接圆半径.

$\Rightarrow\ BC = 2\rho\sin A,\ EF = 2\rho\sin A\cos A$

$DQ = 2\rho\sin C\cos B\cos A$

$DR = 2\rho\sin B\cos C\cos A$

$\angle FDE = \pi - 2A$

$$\Rightarrow QR^2 = DQ^2 + DR^2 - 2DQ\cdot DR\cos(\pi - 2A)$$

$$= 4\rho^2\cos^2 A\left(\sin^2 C\cos^2 B + \sin^2 B\cos^2 C + 2\sin C\cos B\sin B\cos C\cos(2A)\right).$$

$$\Rightarrow QR = 2\rho\cos A\sqrt{f(A,B,C)}.$$

往证 $\left(\sum_{cyc} 2\rho\sin A\right)\left(\sum_{cyc} 2\rho\cos A\sqrt{f(A,B,C)}\right) \geq \left(\sum_{cyc} 2\rho\sin A\cos A\right)^2.$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}\sin A\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\cos A\cdot\sqrt{f(A,B,C)}\right) \geq \left(\sum_{cyc}\sin A\cos A\right)^2.$$

新目标: 找 $\sqrt{f}$ 的下界. (以=平方和表出).

$$f(A,B,C) = \sin^2 C\cos^2 B + \sin^2 B\cos^2 C + 2\sin C\cos B\sin B\cos C\cos(2A)$$

$$= (\sin C\cos B + \sin B\cos C)^2 + 2\sin C\cos B\sin B\cos C\,(\cos(2A) - 1)$$

$$= \sin^2(C+B) - 2\sin C\cos B\sin B\cos C\cdot 2\sin^2 A$$

$$= \sin^2 A\,(1 - 4\sin C\cos B\sin B\cos C).$$

而 $1 - 4\sin C\cos B\sin B\cos C = (\sin^2 B + \cos^2 B)(\sin^2 C + \cos^2 C) - 4\sin C\cos B\sin B\cos C$

齐次化

$$= (\sin B\cos C - \sin C\cos B)^2 + (\cos B\cos C - \sin B\sin C)^2$$

$$= \sin^2(B-C) + \cos^2(B+C)$$

$$= \sin^2(B-C) + \cos^2 A.$$

$$\Rightarrow\ f(A,B,C)=\sin^2A\sin^2(B-C)+\sin^2A\cos^2A$$
$$\geq \sin^2A\cos^2A.$$

$$\Rightarrow\ \sum_{cyc}\cos A\cdot\sqrt{f(A,B,C)}\geq\sum_{cyc}\sin A\cdot\cos^2A.$$

往证 $\left(\sum_{cyc}\sin A\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\sin A\cos^2A\right)\underset{\uparrow}{\geq}\left(\sum_{cyc}\sin A\cos A\right)^2.$

Cauchy-Schwarz. □

注 先从最终结论出发，观察所需的二平方和其中一项的大致形式，不能盲目计算。

E.g. 可转而考虑

$$f(A,B,C)=(\sin C\cos B-\sin B\cos C)^2+2\sin C\cos B\sin B\cos C\,(\cos(2A)+1)$$
$$=\sin^2(B-C)+2\cdot\frac{\sin 2B}{2}\cdot\frac{\sin 2C}{2}\cdot 2\cos^2A$$
$$\geq\cos^2A\cdot\sin 2B\cdot\sin 2C \quad \longleftarrow \text{不是完整平方和形式}$$

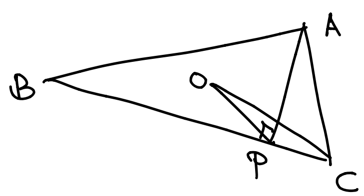
$$\Rightarrow\ p(PQR)=\sum_{cyc}2p\cos A\cdot\sqrt{f(A,B,C)}\geq\sum_{cyc}2p\cos^2A\cdot\sqrt{\sin 2B\cdot\sin 2C}.$$

往证 $\left(\sum_{cyc}\sin A\right)\cdot\left(\sum_{cyc}\cos^2A\cdot\sqrt{\sin 2B\sin 2C}\right)\underset{\uparrow}{\geq}\left(\sum_{cyc}\sin A\cos A\right)^2.$

实际不成立（练习）.

例2 (IMO 2001, P1) $\triangle ABC$ 锐角三角形，O 外接圆心。

$\angle BCA\geq\angle ABC+30^\circ$. 求证：$\angle CAB+\angle COP<90^\circ$.



解答 $90^\circ-\angle CAB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle COB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle COB)=\angle PCO$

原式 $\Longleftrightarrow\angle COP<\angle PCO\Longleftrightarrow OP>PC$.

而 $OP^2=R^2-PB\cdot PC$，$R=OC=OB$

$\leadsto$ 原式 $\Longleftrightarrow R^2-PB\cdot PC>PC^2\Longleftrightarrow R^2>BC\cdot PC$

三角化: $BC = 2R\sin A$, $PC = AC\cos C = 2R\sin B\cos C$

原式 $\Longleftrightarrow 1 > 4\sin A\sin B\cos C \Longleftarrow \sin B\cos C \le \frac{1}{4}$.

使用 $C \geq B + 30^\circ$

$$\Rightarrow \sin B\cos C = \frac{1}{2}\left(\sin(B+C) - \sin(C-B)\right)$$
$$\le \frac{1}{2}\left(1 - \sin(C-B)\right)$$
$$\le \frac{1}{2}\left(1 - \sin 30^\circ\right) = \frac{1}{4}. \qquad \square$$

<u>命题</u> $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = \pi$, $x, y, z \in \mathbb{R}$. 则

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2(yz\cos\theta_1 + zx\cos\theta_2 + xy\cos\theta_3)$$

<u>证明</u> $\theta_3 = \pi - (\theta_1+\theta_2)$, (=平方和?)

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2 - 2(yz\cos\theta_1 + zx\cos\theta_2 + xy\cos\theta_3)$$
$$= \left(z - (x\cos\theta_2 + y\cos\theta_1)\right)^2 + (x\sin\theta_2 - y\sin\theta_1)^2. \qquad \square$$

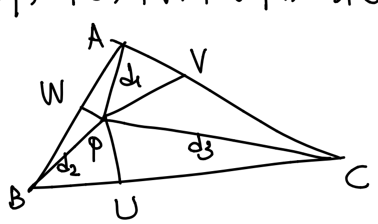
<u>推论</u> $p, q, r > 0$. $\theta_1+\theta_2+\theta_3 = \pi$. 则

$$p\cos\theta_1 + q\cos\theta_2 + r\cos\theta_3 \le \frac{1}{2}\left(\frac{qr}{p} + \frac{rp}{q} + \frac{pq}{r}\right).$$

(在上式中取 $(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{qr}{p}}, \sqrt{\frac{rp}{q}}, \sqrt{\frac{pq}{r}}\right)$ 即可).

<u>定理2</u> (Barrow)　　　(注: 蕴含 Erdös-Mordell).

设 P 在 $\triangle ABC$ 内部, PU, PV, PW 平分 $\angle BPC$, $\angle APC$, $\angle APB$.



求证: $PA+PB+PC \geq 2(PU+PV+PW)$.

证明. $d_1=PA$，$d_2=PB$，$d_3=PC$，$l_1=PU$，$l_2=PV$，$l_3=PW$.

$2\theta_1=\angle BPC$，$2\theta_2=\angle APC$，$2\theta_3=\angle APB$.

$$\Rightarrow \quad l_1=\frac{2d_2d_3}{d_2+d_3}\cos\theta_1,\ l_2=\frac{2d_1d_3}{d_1+d_3}\cos\theta_2,\ l_3=\frac{2d_1d_2}{d_1+d_2}\cos\theta_3.$$

推论 $\Rightarrow$ $l_1+l_2+l_3\le\sqrt{d_2d_3}\cos\theta_1+\sqrt{d_3d_1}\cos\theta_2+\sqrt{d_1d_2}\cos\theta_3$ （均值）

$$\le\frac{1}{2}(d_1+d_2+d_3). \qquad \square$$

推论 (Abi-Khuzam) $x_1,x_2,x_3,x_4>0$. $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$.

则
$$x_1\cos\theta_1+x_2\cos\theta_2+x_3\cos\theta_3+x_4\cos\theta_4 \le\sqrt{\frac{(x_1x_2+x_3x_4)(x_1x_3+x_2x_4)(x_1x_4+x_2x_3)}{x_1x_2x_3x_4}}.$$

证明 取 $p=\frac{x_1^2+x_2^2}{2x_1x_2}+\frac{x_3^2+x_4^2}{2x_3x_4}$，$q=\frac{1}{2}(x_1x_2+x_3x_4)$，$\lambda=\sqrt{\frac{p}{q}}$.

- $\theta_1+\theta_2+(\theta_3+\theta_4)=\pi$

$$\Rightarrow \quad x_1\cos\theta_1+x_2\cos\theta_2+\lambda\cos(\theta_3+\theta_4)\le p\lambda=\sqrt{pq}.$$

- $(\theta_1+\theta_2)+\theta_3+\theta_4=\pi$

$$\Rightarrow \quad x_3\cos\theta_3+x_4\cos\theta_4+\lambda\cos(\theta_1+\theta_2)\le\frac{q}{\lambda}=\sqrt{pq}.$$

相加，利用 $\cos(\theta_3+\theta_4)+\cos(\theta_1+\theta_2)=0$，

得 $\sum_{cyc}x_i\cos\theta_i\le2\sqrt{pq}=RHS$. $\square$