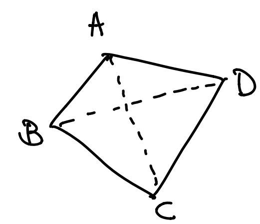
# 复数的应用

最重要的解析描述来自于三角不等式：

<u>定理1</u> $z_1,\cdots,z_n\in\mathbb{C}$，则

$$|z_1|+\cdots+|z_n|\geq|z_1+\cdots+z_n|.$$



<u>定理2</u> (Ptolemy) 对平面上任意点 A, B, C, D，有

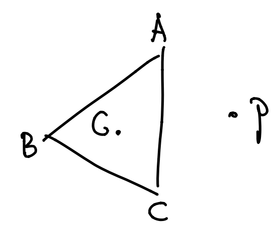
$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{BC}\cdot\overline{DA}\geq\overline{AC}\cdot\overline{BD}.$$

<u>证明</u> 设 $a,b,c,0$ 对应 A, B, C, D，则

原式 $\Longleftrightarrow |a-b|\cdot|c|+|b-c|\cdot|a|\geq|a-c|\cdot|b|$

$\Longleftrightarrow |(a-b)\cdot c|+|(b-c)a|\geq|(a-c)b|$

三角不等式：$(a-b)c+(b-c)a=(a-c)b$. □



<u>例1</u> G为$\triangle ABC$重心，P为平面上任意点，证明：

(1) $\overline{BC}\cdot\overline{PB}\cdot\overline{PC}+\overline{AB}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PB}+\overline{CA}\cdot\overline{PA}\cdot\overline{PC}\geq\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$

(2) $\overline{PA}^3\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^3\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^3\cdot\overline{AB}\geq3\overline{PG}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$.

<u>解答</u> (1) $A,B,C\in\mathbb{C}\longleftrightarrow A,B,C$，　$0\in\mathbb{C}\longleftrightarrow P$.

往证 $|(B-C)\cdot BC|+|(A-B)AB|+|(C-A)CA|$

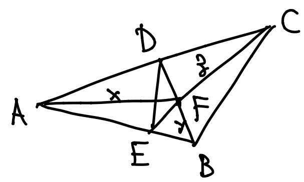
$$\geq|(B-C)(C-A)(A-B)|.$$

三角不等式用于 $(B-C)BC+(A-B)AB+(C-A)CA=-(B-C)(C-A)(A-B)$. □

(2) 练习.

<u>例2</u> (IMO Shortlist, 2002) F是$\triangle ABC$内部一点，$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA$.

证明：$\overline{AB}+\overline{AC}\geq4\overline{DE}$.




解答 $\overline{AF}=x$，$\overline{BF}=y$，$\overline{CF}=z$．$\omega=\zeta_3=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$

$\left(\Rightarrow \omega^3-1=(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\right)$．

$F, A, B, C, D, E \longleftrightarrow 0, x, y\omega, z\omega^2, d, e\in\mathbb{C}$．

$\Rightarrow \overline{DF}=|d|=\frac{xz}{x+z}$，$\overline{EF}=|e|=\frac{xy}{x+y}$．（练习：余弦定理）．

$\Rightarrow d=-\frac{xz}{x+z}\omega$，$e=-\frac{xy}{x+y}\omega^2$．

原式 $\Longleftrightarrow |x-y\omega|+|z\omega^2-x|\geqslant 4\left|\frac{-zx}{z+x}\omega+\frac{xy}{x+y}\omega^2\right|$．

而 $|z\omega^2-x|=|z(-\omega-1)-x|=|z-x\omega|$．

$\Rightarrow$ 原式 $\Longleftrightarrow |x-y\omega|+|z-x\omega|\geqslant\left|\frac{4zx}{z+x}-\frac{xy}{x+y}\omega\right|$

希望有 $|x-y\omega+z-x\omega|\geqslant \text{RHS}$，

$\Longleftrightarrow |p-q\omega|\geqslant|r-s\omega|$，

$p=x+z$，$q=x+y$，$r=\frac{4xz}{z+x}$，$s=\frac{4xy}{x+y}$．

而 $p\geqslant r>0$，$q\geqslant s>0$．

$\Rightarrow |p-q\omega|^2-|r-s\omega|^2=(p-q\omega)(\overline{p-q\omega})-(r-s\omega)\cdot(\overline{r-s\omega})$

$=p^2-r^2+(pq-rs)+(q^2-s^2)\geqslant 0$．

可见等号成立 $\Longleftrightarrow$ $\triangle ABC$ 等边．

□