三角代换

3个基本模型：

$\sqrt{1-x^2} \rightsquigarrow x=\sin t$ 或 $\cos t$，$\sqrt{1-x^2}=\cos t$ 或 $\sin t$

$\sqrt{1+y^2} \rightsquigarrow y=\tan t$ ，$\sqrt{1+y^2}=1/\cos t$

$\sqrt{z^2-1} \rightsquigarrow z=\sec t$，$\sqrt{z^2-1}=\tan t$

后两者利用恒等式：$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$.

例1 (APMO 2004, P5) $a,b,c>0$。证明：

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geq 9(ab+bc+ca)$$

解答 $A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a=\sqrt{2}\tan A$，$b=\sqrt{2}\tan B$，$c=\sqrt{2}\tan C$.

$$\text{原式}\Leftrightarrow \frac{2}{\cos^2A}\cdot\frac{2}{\cos^2B}\cdot\frac{2}{\cos^2C}\geq 9\Big(2\sum_{cyc}\tan A\cdot\tan B\Big).$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9}\geq \cos A\cos B\cos C\,(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C$$
$$+\sin A\sin B\cos C).$$

另一方面，可证明

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C$$
$$-\sin A\sin B\cos C$$

$\rightsquigarrow$ 原式 $\Leftrightarrow \frac{4}{9}\geq\cos A\cos B\cos C\big(\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\big)$.

设 $\theta=\frac{1}{3}(A+B+C)$. 则

$$\cos A\cos B\cos C\leq\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3$$

$$\text{Jensen}\Rightarrow\qquad\qquad\leq\cos^3\theta.$$

只须证 $\quad \dfrac{4}{9}\geq\cos^3\theta(\cos^3\theta-\cos3\theta)\qquad\qquad(*)$

而 $\cos3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\Leftrightarrow\cos^3\theta-\cos3\theta=3\cos\theta-3\cos^3\theta$

$(*)\Leftrightarrow\dfrac{4}{27}\geq\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)$，$\quad\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\cos\theta\in(0,1)$.

设 $r=\cos^2\theta\in(0,1)$，$f(r)=r^2(1-r)$

$\Rightarrow f'(r)=2r-3r^2$，$f'(0)=f'(\frac{2}{3})=0$

$\Rightarrow \max\limits_{0<r<1} f(r)=f(\frac{2}{3})=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$. $\square$

或使用均值：$\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot\frac{\cos^2\theta}{2}\cdot(1-\cos^2\theta)\right)^{\frac{1}{3}}\le\frac{1}{3}\left(\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+1-\cos^2\theta\right)=\frac{1}{3}$

原式等号成立 $\Leftrightarrow \tan A=\tan B=\tan C=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow a=b=c=1$.

例2（捷克斯洛伐克，2002）$a,b,c,d>0$，满足

$$\sum_{cyc}\frac{1}{1+a^4}=1.$$

求证：$abcd\ge 3$.

解答 $a^2=\tan A$，$b^2=\tan B$，$c^2=\tan C$，$d^2=\tan D$

$A,B,C,D\in(0,\frac{\pi}{2})$.

原条件 $\Leftrightarrow \cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+\cos^2D=1$.

$\Rightarrow \sin^2A=1-\cos^2A=\cos^2B+\cos^2C+\cos^2D$

$\ge 3(\cos B\cos C\cos D)^{2/3}$.

$\sin^2B\ge 3(\cos A\cos C\cos D)^{2/3}$

$\sin^2C$，$\sin^2D$ 类似.

四式相乘：

$\sin^2A\cdot\sin^2B\cdot\sin^2C\cdot\sin^2D\ge 3^4\cdot\cos^2A\cdot\cos^2B\cdot\cos^2C\cdot\cos^2D$.

$\Leftrightarrow abcd\ge 3$. $\square$

例3（韩国，1998）$x,y,z>0$，$x+y+z=xyz$.

证明：$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\le\frac{3}{2}.$$

一个重要现象　取 $f(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$，则

(i) $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上非凹

(ii) $f(\tan\theta)$ 关于 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ 是凹函数。

解答　$x=\tan A$，$y=\tan B$，$z=\tan C$，　$A,B,C\in(0,\frac{\pi}{2})$。

原式 $\Longleftrightarrow$ $\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$。

而 $x+y+z=xyz \Longleftrightarrow -z=\frac{x+y}{1-xy}$

$\Longleftrightarrow \tan(\pi-C)=\tan(A+B)$

$\Rightarrow \pi-C=A+B$　（因为 $\pi-C$，$A+B\in(0,\pi)$）。

注意到 $\cos t$ 在 $t\in(0,\frac{\pi}{2})$ 凹：

Jensen $\Rightarrow$ $\cos A+\cos B+\cos C\le 3\cdot\cos\left(\frac{A+B+C}{3}\right)$

$=3\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}$。　□

精巧之处　$\cos x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 凹
在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 凸　} 可以分别处理。

使得 $A,B,C\in(0,\pi)$ 时结论也成立。

定理1　在 $\triangle ABC$ 中，　$\cos A+\cos B+\cos C\le\frac{3}{2}$。

证明一　$\pi-C=A+B \Rightarrow \cos C=-\cos(A+B)$

$=-\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$\Longleftrightarrow$ $3-2(\cos A+\cos B+\cos C)$

$=1+2-2\cos A-2\cos B+2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$

$=1+\cos^2A+\sin^2A+\cos^2B+\sin^2B$

$\quad-2\cos A-2\cos B+2\cos A\cos B-2\sin A\sin B$

$=(\sin A-\sin B)^2+(\cos A+\cos B-1)^2\ge 0$。　□

证明二　$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$。

余弦定理：原式 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\le\frac{3}{2}$。

$$\Leftrightarrow 3abc \geq \sum_{cyc} a(b^2+c^2-a^2).$$
$$= 2abc + \prod_{cyc}(b+c-a)$$

这是Ravi代换中的经典不等式. □

回顾 $R \geq 2r \Leftrightarrow abc \geq \prod_{cyc}(b+c-a)$

$$\Leftrightarrow \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

命题 在$\triangle ABC$中. R = 外接圆半径, r = 内切圆半径.

有 $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

证明 细节略. 核心在于

$$\sum_{cyc} a(b^2+c^2-a^2) = 2abc + \prod_{cyc}(b+c-a).$$

练习 (a) $p, q, r > 0$, $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$. 证明:

$\exists$ 锐角$\triangle ABC$, s.t. $p=\cos A$, $q=\cos B$, $r=\cos C$.

(b) $p, q, r \underline{\geq 0}$, $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$. 证明:

$\exists A, B, C \in [0, \frac{\pi}{2}]$ s.t. $p=\cos A$, $q=\cos B$, $r=\cos C$,

且 $A+B+C=\pi$.

例4 (USA, 2001) $a, b, c \geq 0$, $a^2+b^2+c^2+abc=4$.

求证: $0 \leq ab+bc+ca-abc \leq 2$.

解答 若 $a, b, c > 1$, 则 $a^2+b^2+c^2+abc > 4$.

设 $a \leq 1$, 则 $ab+bc+ca-abc \geq (1-a)bc \geq 0$.

取 $a=2p$, $b=2q$, $c=2r$

$$\Rightarrow p^2+q^2+r^2+2pqr=1$$

练习(b) $\Rightarrow \exists A, B, C \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $A+B+C=\pi$

s.t. $a=2\cos A$, $b=2\cos B$, $c=2\cos C$.

原式 $\Longleftrightarrow \left(\sum_{cyc}\cos A\cos B\right) - 2\cos A\cos B\cos C \le \frac{1}{2}$.

设 $A \geq \frac{\pi}{3}$，则 $1-2\cos A \geq 0$，

有 $\text{LHS} = \cos A(\cos B+\cos C) + \cos B\cos C(1-2\cos A)$.

Jensen $\Rightarrow \cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}$

另外 $2\cos B\cos C = \underbrace{\cos(B-C)}_{\le 1} + \underbrace{\cos(B+C)}_{=-\cos A} \le 1-\cos A$

$\Rightarrow \text{LHS} \le \cos A\left(\frac{3}{2}-\cos A\right) + \frac{1}{2}(1-\cos A)(1-2\cos A) = \frac{1}{2}$. $\square$