导数的应用

定理 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 可微. 则

$f'(x)\geq 0 \Rightarrow f$ 在 (a,b) ↑,

$f'(x)>0 \Rightarrow f$ 在 (a,b) 严格 ↑.

例1 (爱尔兰, 2000) $x,y\geq 0$, $x+y=2$.

求证 $x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2$.

解答 齐次化: 原式 $\Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{x+y}{2}\right)^6\geq x^2y^2(x^2+y^2)$

$\Leftrightarrow (x+y)^6\geq 32x^2y^2(x^2+y^2)$.

不妨设 $xy\neq 0$. 由齐次性, 可约化到 $xy=1$ 之情形.

此时 原式 $\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^6\geq 32\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)$,

$\Leftrightarrow p^3\geq 32(p-2)$, $p=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\geq 4$.

记 $F(p)=p^3-32(p-2)$, $p\geq 4$.

$\Rightarrow F'(p)=3p^2-32\geq 0$ $\left(p\geq\sqrt{\frac{32}{3}}\right)$

$\Rightarrow F(p)\geq F(4)=0$, $\forall p\geq 4$. □

另解 原式 $\Leftrightarrow (x+y)^6\geq 32(x^2+y^2)(xy)^2$, $x\geq y\geq 0$.

取代换 $u=x+y$, $v=x-y$. 则 $u\geq v\geq 0$,

原式 $\Leftrightarrow u^6\geq 32\left(\frac{u^2+v^2}{2}\right)\left(\frac{u^2-v^2}{4}\right)^2$

$\Leftrightarrow u^6\geq (u^2+v^2)(u^2-v^2)^2$

而 $u^4\geq u^4-v^4\geq 0$, $u^2\geq u^2-v^2\geq 0$

$\Rightarrow u^6\geq (u^4-v^4)(u^2-v^2)=(u^2+v^2)(u^2-v^2)^2$. □

例2 (IMO 1984, P1) $x, y, z \geq 0$, $x+y+z=1$.

求证 $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$.

解答 $f(x,y,z)=xy+yz+zx-2xyz$. 不妨设 $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$.

$x+y+z=1 \Rightarrow x \leq \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow f(x,y,z)=(1-3x)yz+xyz+zx+xy \geq 0$.

均值 $\Rightarrow yz \leq \left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{1-x}{2}\right)^2$.

$$\Rightarrow f(x,y,z)=x(y+z)+yz(1-2x)$$
$$\leq x(1-x)+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2(1-2x)$$
$$=\frac{1}{4}(-2x^3+x^2+1).$$

设 $F(x)=RHS$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow F'(x)=\frac{3}{2}x\left(\frac{1}{3}-x\right) \geq 0$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$

$\Rightarrow F(x) \leq F\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{27}$, $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$. □

例3 (IMO 2000, P2) $a, b, c>0$, $abc=1$.

求证: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$.

解答 (基于日本队选手解法改编)

$abc=1 \Rightarrow a,b,c$ 至少一者 ≥ 1. 设 $b \geq 1$.

$c=\frac{1}{ab} \rightsquigarrow$ 原式 $\Leftrightarrow \left(a-1+\frac{1}{b}\right)(b-1+ab)\left(\frac{1}{ab}-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$

$\Leftrightarrow a^3b^3-a^2b^3-ab^3-a^2b^2+3ab^2-ab+b^3-b^2-b+1 \geq 0$.

设 $x=ab$, $f_b(t)=t^3+b^3-b^2t-bt^2+3bt-t^2-b^2-t-b+1$.

固定 $b \geq 1$, 往证 $f_b(t)=F(t) \geq 0$ 对 $t \geq 0$ 成立.

$\Rightarrow F'(t)=3t^2-2(b+1)t-(b^2-3b+1)$.

$\Rightarrow F'(t)$ 有两实根 $\lambda_{1,2}=\frac{1}{3}\left(b+1 \pm \sqrt{4b^2-7b+4}\right)$.

$t=\lambda_1$: F 局部极小

$$\Rightarrow F(t) \geq \min\{F(0), F(\lambda_1)\}, \quad t \geq 0.$$

往证 $F(0) \geq 0$，$F(\lambda_1) \geq 0$。

(1) $F(0) = b^3 - b^2 - b + 1 = (b-1)^2(b+1) \geq 0$.

(2) 作带余除法

$$F(t) = F'(t)\left(\frac{t}{3} - \frac{b+1}{9}\right) + \frac{1}{9}\left((-8b^2+14b-8)t + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8\right).$$

令 $t = \lambda_1$，$F'(\lambda_1) = 0$

$$\Rightarrow F(\lambda_1) = \frac{1}{9}\left((-8b^2+14b-8)\lambda_1 + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8\right).$$

只须证 $(-8b^2+14b-8)\cdot\frac{1}{3}\left(b+1+\sqrt{4b^2-7b+4}\right) + 8b^3 - 7b^2 - 7b + 8 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \underbrace{16b^3 - 15b^2 - 15b + 16}_{>0} \geq \underbrace{(8b^2 - 14b + 8)}_{>0}\sqrt{4b^2 - 7b + 4}.$$

$$\left(\begin{array}{ll} = 16(b^3 - b^2 - b + 1) + b^2 + b & = 8(b-1)^2 + 2b > 0 \\ > 16(b^2-1)(b-1) \geq 0 & \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow (16b^3 - 15b^2 - 15b + 16)^2 \geq (8b^2 - 14b + 8)^2(4b^2 - 7b + 4).$$

$$\Leftrightarrow 864b^5 - 3375b^4 + 5022b^3 - 3375b^2 + 864b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{864b^4 - 3375b^3 + 5022b^2 - 3375b + 864}_{=G(b)} \geq 0.$$

$$\rightsquigarrow G(x)' = 3456x^3 - 10125x^2 + 10044x - 3375$$

$$= (x-1)(\underbrace{3456x^2 - 6669x + 3375}_{>0,\ \forall x \in \mathbb{R}}).$$

$$\Rightarrow G: (-\infty, 1] \searrow, \quad [1, \infty) \nearrow.$$

$$\Rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} G(x) = G(1) = 0 \Rightarrow G(x) \geq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}. \qquad \square$$