不等式专题

构造上下界 补充习题及解答

戴文晗

问题 1 (USAMO 夏令营, 2002)**.** 设 a, b, c 是正实数. 求证:

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant 3.$$

证明. 对于正实数 $t > 0$, 断言

$$(2t)^{\frac{2}{3}} \geqslant \frac{3t}{t+1}.$$

这等价于

$$4t^2 \geqslant \frac{27t^3}{(t+1)^3} \iff 4(t+1)^3 - 27t \geqslant 0.$$

设 $f(t) = 4(t+1)^3 - 27t$, 则有

$$f'(t) = 12(t+1)^2 - 27 \geqslant 0 \iff t \geqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } t \leqslant -\frac{5}{2}.$$

所以对 $t > 0$ 有

$$f(t) > f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

这就证明了断言. 于是

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant \frac{3\frac{a}{b+c}}{\frac{a}{b+c}+1} = 3\left(\frac{a}{a+b+c}\right).$$

进一步有

$$\left(\frac{2a}{b+c}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2b}{c+a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{2c}{a+b}\right)^{\frac{2}{3}} \geqslant 3\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{a}{a+b+c}\right) = 3.$$

□

问题 2 (APMO, 2005)**.** 设 a, b, c 是满足 $abc = 8$ 的正实数. 求证:

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geqslant \frac{4}{3}.$$

证明. 对于正实数 $t > 0$, 断言

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \geqslant \frac{2}{2+t^2}.$$

这等价于

$$(2+t^2)^2 \geqslant 4(1+t^3) \iff t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \geqslant 0.$$

这就证明了断言. 这样就得到

$$\begin{aligned}
&\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\\
\geqslant&\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}+\frac{4b^2}{(2+b^2)(2+c^2)}+\frac{4c^2}{(2+c^2)(2+a^2)}\\
=&\frac{4a^2(2+c^2)+4b^2(2+a^2)+4c^2(2+b^2)}{(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)}.
\end{aligned}$$

所以原目标式等价于

$$\begin{aligned}
&3a^2(2+c^2)+3b^2(2+a^2)+3c^2(2+b^2)\\
=&6(a^2+b^2+c^2)+3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\\
\geqslant&(2+a^2)(2+b^2)(2+c^2)\\
=&8+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+4(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2c^2.
\end{aligned}$$

也即

$$2(a^2+b^2+c^2)+(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geqslant 8+a^2b^2c^2=72.$$

根据均值不等式,

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3(a^2b^2c^2)^{1/3}=12,\quad a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant 3(a^4b^4c^4)^{1/3}=48.$$

这就完成了证明. □