齐次化

给定对称不等式（非齐次） $\overset{\text{约束条件}}{\rightsquigarrow}$ 齐次对称不等式

(e.g. $ab=1$, $xyz=1$, $x+y+z=1$).

例1（匈牙利，1996） $a,b>0$, $a+b=1$.

证明：$\dfrac{a^2}{a+1}+\dfrac{b^2}{b+1}\geq\dfrac{1}{3}$

解答 原式 $\Leftrightarrow \dfrac{a^2}{(a+b)(a+(a+b))}+\dfrac{b^2}{(a+b)(b+(a+b))}\geq\dfrac{1}{3}$.

$\Leftrightarrow \quad a^2b+ab^2\leq a^3+b^3$.

$\Leftrightarrow \quad (a^3+b^3)-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)\geq 0$

等号成立 $\Leftrightarrow$ $a=b=\frac{1}{2}$. $\square$

上述不等式可作如下推广：

定理 $a_1,a_2,b_1,b_2>0$, $a_1+a_2=b_1+b_2$, $\max(a_1,a_2)\geq\max(b_1,b_2)$.

$x,y\geq 0$. 求证：

$$x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}\geq x^{b_1}y^{b_2}+x^{b_2}y^{b_1}.$$

证明 不妨设 $a_1\geq a_2$, $b_1\geq b_2$, $a_1\geq b_1$, $x,y>0$.

$a_1+a_2=b_1+b_2 \Rightarrow a_1-a_2=(b_1-a_2)+(b_2-a_2)$

$\Rightarrow x^{a_1}y^{a_2}+x^{a_2}y^{a_1}-x^{b_1}y^{b_2}-x^{b_2}y^{b_1}$

$= x^{a_2}y^{a_2}(x^{a_1-a_2}+y^{a_1-a_2}-x^{b_1-a_2}y^{b_2-a_2}-x^{b_2-a_2}y^{b_1-a_2})$

$= x^{a_2}y^{a_2}(x^{b_1-a_2}-y^{b_1-a_2})(x^{b_2-a_2}-y^{b_2-a_2})$

$= \dfrac{1}{x^{a_2}y^{a_2}}(x^{b_1}-y^{b_1})(x^{b_2}-y^{b_2})\geq 0$. $\square$

注 上述定理一般称作"bunching". 考虑取等条件作为练习.

记号 轮换和 $\sum_{cyc} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y)$

对称和 $\sum_{sym} P(x,y,z) = P(x,y,z) + P(x,z,y) + P(y,x,z) + P(y,z,x) + P(z,x,y) + P(z,y,x)$.

E.g. $\sum_{sym} x^2y = x^2y + x^2z + y^2z + y^2x + z^2x + z^2y$.

$\sum_{sym} xyz = 6xyz = 2\cdot\sum_{cyc} xyz$,

例2 (IMO 1984, P1) $x,y,z \geq 0$, $x+y+z=1$.

求证: $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$.

解答 $x+y+z=1$

$\rightsquigarrow$ 原式 $\iff 0 \leq (xy+yz+zx)(x+y+z) - 2xyz \leq \frac{7}{27}(x+y+z)^3$

下界: 平凡, 因为 $0 \leq xyz + \sum_{sym} x^2y$.

上界: $27xyz + 27\sum_{sym} x^2y \leq 7\left(x^3+y^3+z^3+3\sum_{sym}x^2y + 6xyz\right)$

$\iff 7(x^3+y^3+z^3) + 15xyz - 6\sum_{sym}x^2y \geq 0$.

LHS $= 2\sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y + 5\left(3xyz + \sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y\right)$

只须证 $2\sum_{cyc} x^3 \geq \sum_{sym} x^2y$ & $3xyz + \sum_{cyc} x^3 \geq \sum_{sym} x^2y$.

而 $2\sum_{cyc} x^3 - \sum_{sym} x^2y = \sum_{cyc}\left((x^3+y^3) - (x^2y+xy^2)\right)$

$= \sum_{cyc}(x^3+y^3-x^2y-xy^2) \geq 0$.

第二式 $\iff \sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0$ (Schur) □

例3 (伊朗1998) $x,y,z>1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.

证明: $\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

解答 $a=\frac{1}{x}$, $b=\frac{1}{y}$, $c=\frac{1}{z}$. $0<a,b,c<1$, $a+b+c=2$.

原式 $\iff \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \geq \sqrt{\frac{1-a}{a}} + \sqrt{\frac{1-b}{b}} + \sqrt{\frac{1-c}{c}}$,

$$\overset{\text{齐次化}}{\iff} \sqrt{\frac{1}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sum_{cyc}\sqrt{\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{a}}.$$

$$\iff \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sum_{cyc}\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}.$$

Cauchy-Schwarz:

$$\sqrt{\left((b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)} \geq \sum_{cyc}\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}. \qquad \square$$