Schur不等式

<u>定理</u> (Schur) $x, y, z \geq 0$，$r > 0$，则

$$\sum_{cyc} x^r(x-y)(x-z) \geq 0.$$

<u>证明</u> 原式为对称多项式．不妨设 $x \geq y \geq z$．

原式 $\Leftrightarrow \underbrace{(x-y)\left(x^r(x-z)-y^r(y-z)\right)}_{\text{同正负}} + \underbrace{z^r(x-z)(y-z)}_{\geq 0} \geq 0.$ □

<u>练习</u> 证明下列命题：若 $a, b, c, d \geq 0$，$r > 0$，则

$$\sum_{cyc} a^r(a-b)(a-c)(a-d) \geq 0.$$

<u>推论1</u> 有用的 $r=1$ 情形变式：

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq \sum_{sym} x^2y.$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{sym}(xyz + x^3) \geq 2\sum_{sym} x^2y.$$

<u>推论2</u> $x, y, z \geq 0$，则

$$3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq 2\left((xy)^{\frac{3}{2}} + (yz)^{\frac{3}{2}} + (zx)^{\frac{3}{2}}\right).$$

<u>证明</u> Schur + AM-GM

$$\Rightarrow \quad 3xyz + x^3 + y^3 + z^3 \geq \sum_{sym} x^2y$$

$$= \sum_{cyc} x^2y + xy^2 \geq \sum_{cyc} 2(xy)^{\frac{3}{2}}.$$ □

<u>例1</u> $a, b, c > 0$，求证：

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2) \geq 9(ab+bc+ca).$$

解答 展开：原式 $\Leftrightarrow 8+(abc)^2+2\sum_{cyc}a^2b^2+4\sum_{cyc}a^2 \geq 9\sum_{cyc}ab$.

另有 $\sum_{cyc}(ab-1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3+\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)-2\sum_{cyc}ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6+2\sum_{cyc}a^2b^2 \geq 4\sum_{cyc}ab.$$

只须证 $2+(abc)^2+4\sum_{cyc}a^2 \geq 5\sum_{cyc}ab$.

而 $3(a^2+b^2+c^2) \geq 3(ab+bc+ca)$

只须证 $2+(abc)^2+a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca)$.

这是下列结果的 $t=1$ 情形. □

推论3 $0<t\leq 3$，$a,b,c\geq 0$，有

$$(3-t)+t(abc)^{\frac{2}{t}}+a^2+b^2+c^2 \geq 2(ab+bc+ca).$$

（特别地，$t=1,2,\frac{1}{2}$ 的情形比较有用）.

证明 $x=a^{2/3}$，$y=b^{2/3}$，$z=c^{2/3}$.

原式 $\Rightarrow 3-t+t(xyz)^{\frac{3}{t}}+\sum_{cyc}x^3 \geq \sum_{cyc}2(xy)^{\frac{3}{2}}$.

推论1 $\Rightarrow$ 只须证 $3-t+t(xyz)^{3/t} \geq 3xyz$.

均值 $\Rightarrow \frac{3-t}{3}\cdot 1+\frac{t}{3}(xyz)^{\frac{3}{t}} \geq 1^{\frac{3-t}{3}}\left((xyz)^{\frac{3}{t}}\right)^{\frac{t}{3}}=3xyz$.

等号成立 $\Leftrightarrow a=b=c=1$. □

例2（IMO 2000，P2）$a,b,c>0$，$abc=1$.

证明：$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1$.

解答 齐次化，原式 $\Leftrightarrow \prod_{cyc}\left(a-(abc)^{1/3}+\frac{(abc)^{2/3}}{b}\right)\leq abc$

取 $a=x^3$，$b=y^3$，$c=z^3$. $x,y,z>0$,

原式 $\Leftrightarrow \prod_{cyc}\left(x^3-xyz+\frac{(xyz)^2}{y^3}\right)\leq x^3y^3z^3$.

$$\Leftrightarrow \prod_{cyc}(x^2y-y^2z+z^2x)\leq x^3y^3z^3.$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3x^3y^3z^3 + \sum_{cyc} x^6y^3 \geq \sum_{cyc} x^4y^4z + \sum_{cyc} x^5y^2z^2.$$

$$\Longleftrightarrow \quad z(x^2y)(y^2z)(z^2x) + \sum_{cyc}(x^2y)^3 \geq \sum_{sym}(x^2y)^2(y^2z).$$

这是 Schur 推论1. □

例13 $a, b, c > 0$, $abc = 1$.

求证: $\dfrac{1}{a+b+1} + \dfrac{1}{b+c+1} + \dfrac{1}{c+a+1} \leq 1$.

解答 原式 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{cyc} \frac{1}{a+b+(abc)^{1/3}} \leq \frac{1}{(abc)^{1/3}}$.

取 $a = x^3$, $b = y^3$, $c = z^3$, $x, y, z > 0$.

则原式 $\Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{cyc} \frac{1}{x^3+y^3+xyz} \leq \frac{1}{xyz}$.

$$\Longleftrightarrow \quad xyz\sum_{cyc}(x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)$$
$$\leq (x^3+y^3+xyz)(y^3+z^3+xyz)(z^3+x^3+xyz)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sum_{sym} x^6y^3 \geq \sum_{sym} x^5y^2z^2$$

而
$$\begin{aligned}
\sum_{sym} x^6y^3 &= \sum_{cyc} x^6y^3 + y^6x^3 \\
&\geq \sum_{cyc} x^5y^4 + x^4y^5 \qquad \text{(bunching)} \\
&= \sum_{cyc} x^5(y^4+z^4) \\
&\geq \sum_{cyc} x^5(y^2z^2+y^2z^2) \qquad \text{(bunching)} \\
&= \sum_{sym} x^5y^2z^2.
\end{aligned}$$
□

(*) 另附4道习题, 见课程网页.