

不等式专题  
SCHUR 不等式 补充习题

戴文晗

解答会在下节课前更新在课程网页上. 推荐完成问题 1-3, 问题 4 选做.

问题 1. 证明在锐角三角形  $ABC$  中,

$$\cot^3 A + \cot^3 B + \cot^3 C + 6 \cot A \cot B \cot C \geq \cot A + \cot B + \cot C.$$

问题 2 (韩国, 1998). 设  $I$  是三角形  $ABC$  的内心. 证明

$$IA^2 + IB^2 + IC^2 \geq \frac{BC^2 + CA^2 + AB^2}{3}.$$

问题 3. 设  $a, b, c$  分别为某三角形的三边长. 求证

$$a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b > a^3 + b^3 + c^3 + 2abc.$$

问题 4 (Surányi). 证明对任意  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ , 有

$$(n-1)(x_1^n + \dots + x_n^n) + nx_1 \cdots x_n \geq (x_1 + \dots + x_n)(x_1^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}).$$