SCHUR 不等式 补充习题及解答

戴文晗

问题 1. 证明在锐角三角形 ABC 中,

$$\cot^3 A+\cot^3 B+\cot^3 C+6\cot A\cot B\cot C\geqslant \cot A+\cot B+\cot C.$$

证明. 由于 $A+B+C=\pi$, 我们有 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$. 作换元

$$x=\cot A,\quad y=\cot B,\quad z=\cot C.$$

因为 A,B,C 为锐角, 有

$$x,y,z>0,\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{xyz}.$$

后者即等价于 $xy+yz+zx=1$, 于是原式齐次化为

$$\begin{aligned}x^3+y^3+z^3+6xyz&\geqslant(x+y+z)(xy+yz+zx)\\&=x^2y+x^2z+xy^2+xz^2+y^2z+yz^2+3xyz.\end{aligned}$$

这进一步等价于

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\geqslant\sum_{\mathrm{sym}}x^2y.$$

而这便是 Schur 不等式在 $r=1$ 的推论. □

问题 2 (韩国, 1998)**.** 设 I 是三角形 ABC 的内心. 证明

$$IA^2+IB^2+IC^2\geqslant\frac{BC^2+CA^2+AB^2}{3}.$$

补注. 本题原式为二次齐次式, 看似与 Schur 不等式的次数不同, 但也可以通过齐次化条件升高为三次, 并使用 Schur 不等式的 $r=1$ 推论.

证明. 设内切圆与 BC,CA,AB 分别相交于 D,E,F, 记 $BD=BF=y$, $CD=CE=z$, $AE=AF=x$. 于是有

$$BC=y+z,\ AB=x+y,\ CA=z+x.$$

此外, 根据熟知的几何事实[1]

$$IA^2=\frac{bc(b+c-a)}{b+c+a}.$$

[1]参见任意一本奥林匹克竞赛平面几何教程.

于是只需证

$$3\sum_{\text{cyc}}\frac{bc(b+c-a)}{b+c+a}\geqslant\sum_{\text{cyc}}a^2,$$

也即

$$\begin{aligned}3\sum_{\text{cyc}}bc(b+c-a)&=2\sum_{\text{sym}}a^2b\\&\geqslant(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\&=9abc+\sum_{\text{cyc}}a^3.\end{aligned}$$

代入 Ravi 代换, 上式等价于

$$2\sum_{\text{sym}}(y+z)^2(x+z)\geqslant 9(x+y)(y+z)(z+x)+\sum_{\text{cyc}}(x+y)^3.$$

展开后得到

$$24xyz+4\sum_{\text{cyc}}x^3+10\sum_{\text{sym}}x^2y\geqslant\left(18xyz+9\sum_{\text{sym}}x^2y\right)+\left(2\sum_{\text{cyc}}x^3+3\sum_{\text{sym}}x^2y\right).$$

整理后, 这即是 Schur 不等式的推论

$$3xyz+\sum_{\text{cyc}}x^3\geqslant\sum_{\text{sym}}x^2y.$$

这就完成了证明. □

问题 3. 设 a,b,c 分别为某三角形的三边长. 求证

$$a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b>a^3+b^3+c^3+2abc.$$

证明. 直接使用 Ravi 代换

$$a=y+z,\quad b=z+x,\quad c=x+y,\quad x,y,z>0.$$

原式等价于

$$\sum_{\text{sym}}(y+z)^2(x+z)>2(x+y)(y+z)(z+x)+\sum_{\text{cyc}}(x+y)^3.$$

直接展开有

$$\sum_{\text{sym}}(y+z)^2(x+z)=\sum_{\text{sym}}5x^2y+2(x^3+y^3+z^3)+12xyz$$

以及

$$\begin{aligned}2(x+y)(y+z)(z+x)&=\sum_{\text{sym}}2x^2y+4xyz,\\\sum_{\text{cyc}}(x+y)^3&=2(x^3+y^3+z^3)+\sum_{\text{sym}}3x^2y.\end{aligned}$$

所以原式等价于

$$8xyz > 0.$$

这就完成了证明. □

问题 4 (Surànyi)**.** 证明对任意 $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$, 有

$$(n-1)(x_1^n + \cdots + x_n^n) + nx_1 \cdots x_n \geqslant (x_1 + \cdots + x_n)(x_1^{n-1} + \cdots + x_n^{n-1}).$$

补注. 本题不是 Schur 不等式的应用, 而是阐述了类似于 n 元 Schur 不等式的结论. 注意到 $n = 3$ 时上式等价于 $r = 1$ 的 Schur 不等式. 回顾课程中提到的自然的四元 Schur 推广的反例, 与上述不等式 $n = 4$ 的情形有所不同.

证明. 使用数学归纳法. 在 $n = 2$ 的情形原式即为 $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 \geqslant (x_1 + x_2)^2$. 设原式对 n 成立, 我们考虑 $n + 1$ 的情形. 由于原式是齐次式, 不妨设 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_{n+1}$ 以及 $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$, 往证:

$$n\sum_{k=1}^{n+1} x_k^{n+1} + (n+1)\prod_{k=1}^{n+1} x_k \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} x_k^n\right).$$

等价地,

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^{n+1} + nx_{n+1}^{n+1} + nx_{n+1}\prod_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\prod_{k=1}^{n} x_k - (1 + x_{n+1})\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^n + x_{n+1}^n\right) \geqslant 0.$$

利用归纳假设有

$$nx_{n+1}\prod_{k=1}^{n} x_k \geqslant x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} - (n-1)x_{n+1}\sum_{k=1}^{n} x_k^n.$$

于是只需证

$$\begin{aligned}\left(n\sum_{k=1}^{n} x_k^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k^n\right) - x_{n+1}\left(n\sum_{k=1}^{n} x_k^n - \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1}\right)& \\ + x_{n+1}\left(\prod_{k=1}^{n} x_k + (n-1)x_{n+1}^n - x_{n+1}^{n-1}\right) &\geqslant 0.\end{aligned}$$

这个不等式可以分为下列两部分来证明. 首先, 由 Chebyshev 不等式

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^n - \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} \geqslant 0.$$

另一方面, 我们有

$$nx_k^{n+1} + \frac{1}{n}x_k^{n-1} \geqslant 2x_k^n, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

将这 n 个式子相加可得

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n} x_k + (n-1)x_{n+1}^{n} - x_{n+1}^{n-1} \\
=&\prod_{k=1}^{n} (x_k - x_{n+1} + x_{n+1}) + (n-1)x_{n+1}^{n} - x_{n+1}^{n-1} \\
\geqslant&\, x_{n+1}^{n} + x_{n+1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{n+1}) + (n-1)x_{n+1}^{n} - x_{n+1}^{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

进一步, 等价地有

$$n\sum_{k=1}^{n} x_k^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} x_k^{n} \geqslant \frac{1}{n}\left(n\sum_{k=1}^{n} x_k^{n} - \sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1}\right).$$

但我们已经假设 $x_{n+1} \leqslant \frac{1}{n}$, 这就完成了证明. $\square$