Muirhead定理

Muirhead定理是排序的体现，描述了"散乱程度小的和较大"这一现象。

定理 (Muirhead) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq 0$, $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq 0$,

$$a_1 \geq b_1,\quad a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2,\quad a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

$x, y, z > 0$. 则 $\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} \geq \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}$.

证明 (1) 设 $b_1 \geq a_2 \Rightarrow a_1 \geq a_1 + a_2 - b_1$

又 $a_1 \geq b_1 \Rightarrow a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$

$$\Rightarrow \max(a_1, a_2) = a_1 \geq \max(a_1 + a_2 - b_1, b_1)$$

而 $a_1 + a_2 - b_1 \geq b_1 + a_3 - b_1 = a_3$

$a_1 + a_2 - b_1 \geq b_2 \geq b_3$

$$\Rightarrow \max(a_1 + a_2 - b_1, a_3) \geq \max(b_2, b_3).$$

应用两次 bunching:

$$\begin{aligned}
\sum_{sym} x^{a_1} y^{a_2} z^{a_3} &= \sum_{cyc} z^{a_3} (x^{a_1} y^{a_2} + x^{a_2} y^{a_1}) \\
&\geq \sum_{cyc} z^{a_3} (x^{a_1+a_2-b_1} y^{b_1} + x^{b_1} y^{a_1+a_2-b_1}) \\
&= \sum_{cyc} x^{b_1} (y^{a_1+a_2-b_1} z^{a_3} + y^{a_3} z^{a_1+a_2-b_1}) \\
&\geq \sum_{cyc} x^{b_1} (y^{b_2} z^{b_3} + y^{b_3} z^{b_2}) \\
&= \sum_{sym} x^{b_1} y^{b_2} z^{b_3}.
\end{aligned}$$

(2) 设 $b_1 \leq a_2$,

$$3b_1 \geq b_1 + b_2 + b_3 = a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + a_2 + a_3$$

$\Rightarrow b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$,

$a_1 \geq a_2 \geq b_1 \geq a_2 + a_3 - b_1$.

$\Rightarrow \max(a_2, a_3) \geq \max(b_1, a_2 + a_3 - b_1)$

$\max(a_1, a_2 + a_3 - b_1) \geq \max(b_2, b_3)$.

类似地，连续用两次 bunching：

$$\begin{aligned}\sum_{sym} x^{a_1}y^{a_2}z^{a_3} &= \sum_{cyc} x^{a_1}(y^{a_2}z^{a_3}+z^{a_2}y^{a_3}) \\ &\geq \sum_{cyc} x^{a_1}(y^{b_1}z^{a_2+a_3-b_1}+z^{b_1}y^{a_2+a_3-b_1}) \\ &= \sum_{cyc} y^{b_1}(x^{a_1}z^{a_2+a_3-b_1}+z^{a_1}x^{a_2+a_3-b_1}) \\ &\geq \sum_{cyc} y^{b_1}(x^{b_2}z^{b_3}+z^{b_2}x^{b_3}) \\ &= \sum_{sym} x^{b_1}y^{b_2}z^{b_3}.\end{aligned}$$

□

补注 等号成立 $\Leftrightarrow x=y=z$.

但若 $x,y,z>0$ 改为 $x,y,z\geq 0$,

取 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3>0$,

则 等号成立 $\Leftrightarrow x=y=z$ 或 $x=y, z=0$ 或 $x=z, y=0$ 或 $y=z, x=0$.

推论 (Nesbitt) $a,b,c>0$，求证:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

证明 通分，原式 $\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a(a+b)(a+c)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$

展开 $\Leftrightarrow \sum_{sym} a^3 \geq \sum_{sym} a^2b$. □

例1 (IMO 1995) $a,b,c>0$, $abc=1$. 求证:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}\geq\frac{3}{2}.$$

解答 原式 $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}\geq\frac{3}{2(abc)^{4/3}}$.

设 $a=x^3$, $b=y^3$, $c=z^3$. $x,y,z>0$.

原式 $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{x^9(y^3+z^3)}\geq\frac{3}{2x^4y^4z^4}$.

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}x^{12}y^{12}+2\sum_{sym}x^{12}y^9z^3+\sum_{sym}x^9y^9z^6 \geq 3\sum_{sym}x^{11}y^8z^5+6x^8y^8z^8.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{sym}x^{12}y^{12}-\sum_{sym}x^{11}y^{8}z^{5}\right)+2\left(\sum_{sym}x^{12}y^{9}z^{3}-\sum_{sym}x^{11}y^{8}z^{5}\right)$$
$$+\left(\sum_{sym}x^{9}y^{9}z^{6}-\sum_{sym}x^{8}y^{8}z^{8}\right)\geq 0.$$

左式各项 $\geq 0 \Leftarrow$ Muirhead. □

例2（伊朗 1996） $x,y,z>0$. 求证：

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{1}{(y+z)^2}+\frac{1}{(z+x)^2}\right)\geq \frac{9}{4}.$$

解答 原式 $\Leftrightarrow 4\sum_{sym}x^5y+2\sum_{cyc}x^4yz+6x^2y^2z^2$

$$-\sum_{sym}x^4y^2-6\sum_{cyc}x^3y^3-2\sum_{sym}x^3y^2z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^4y^2\right)}_{\text{Muirhead}}+3\underbrace{\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^3y^3\right)}_{\text{Muirhead}}$$

$$+2xyz\underbrace{\left(3xyz+\sum_{cyc}x^3-\sum_{sym}x^2y\right)}_{\text{Schur, } r=1}\geq 0.$$ □

例3 $x,y,z\geq 0$，$xy+yz+zx=1$. 求证：

$$\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\geq \frac{5}{2}.$$

解答 $xy+yz+zx=1$，齐次化：

原式 $\Leftrightarrow (xy+yz+zx)\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right)^2\geq \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym}x^5y+\sum_{sym}x^4yz+14\sum_{sym}x^3y^2z+38x^2y^2z^2$$
$$\geq \sum_{sym}x^4y^2+3\sum_{sym}x^3y^3.$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^4y^2\right)+3\left(\sum_{sym}x^5y-\sum_{sym}x^3y^3\right)$$

$$+xyz\left(\sum_{sym}x^3+14\sum_{sym}x^2y+38xyz\right)\geq 0.$$ □

补注 若无约束 $xy+yz+zx=1$，等号成立条件为

$x=y,\ z=0$ 或 $x=z,\ y=0$ 或 $y=z,\ x=0$.

在上题中，等价于 $(x,y,z)=(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)$.