正则化

例1 (IMO 2001, P2) $a, b, c > 0$,

求证 $\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq 1$.

解答1 $x = \frac{a}{a+b+c}$, $y = \frac{b}{a+b+c}$, $z = \frac{c}{a+b+c}$. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.

原式 $\Leftrightarrow x f(x^2+8yz) + y f(y^2+8zx) + z f(z^2+8xy) \geq 1$.

f 凸, $x+y+z=1$.

Jensen $\Rightarrow$ LHS $\geq f(x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy))$.

另有 $f \downarrow$, $f(1) = 1$.

只须证 $x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy) \leq 1$.

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 \geq x(x^2+8yz) + y(y^2+8zx) + z(z^2+8xy)$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - x(x^2+8yz) - y(y^2+8zx) - z(z^2+8xy)$

$= 3\left(x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2\right) \geq 0$. □

在上式中, 我们引入正则化条件 $x+y+z=1$.

但也可以选取 $xyz=1$ 作为条件.

解答2 $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ca}{b^2}$, $z = \frac{ab}{c^2}$ $\Rightarrow xyz = 1$.

原式 $\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{1+8x}} \geq 1$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{(1+8x)(1+8y)} \geq \sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)}$.

$\overset{\text{平方}}{\Longleftrightarrow} 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \sum_{cyc} \sqrt{1+8x} \geq 510$.

另 $xyz = 1 \Rightarrow x+y+z \geq 3(xyz)^{1/3} = 3$.

$\Rightarrow (1+8x)(1+8y)(1+8z) \geq 9^3 \cdot x^{8/9} y^{8/9} z^{8/9} = 729$

$\sum_{cyc} \sqrt{1+8x} \geq \sum_{cyc} \sqrt{9x^{8/9}} \geq \sum_{cyc} 3(xyz)^{\frac{4}{27}} = 9$. □

利用上述结果可得:

命题 a, b, c 是 $\triangle ABC$ 三边，则

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\geq 0$$

证明 取 $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$. $x, y, z>0$.

原式 $\iff x^3z+y^3x+z^3y\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$

$\iff \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{z}+\dfrac{z^2}{x}\geq x+y+z$. (齐次)

齐次 $\Rightarrow$ 可设 $x+y+z=1$.

$\rightsquigarrow$ 原式 $\iff y f\left(\frac{x}{y}\right)+z f\left(\frac{y}{z}\right)+x f\left(\frac{z}{x}\right)\geq 1$,

$f(t)=t^2$ 凸 $(t\in\mathbb{R})$

Jensen $\Rightarrow$ $y f\left(\frac{x}{y}\right)+z f\left(\frac{y}{z}\right)+x f\left(\frac{z}{x}\right)$

$\geq f\left(y\cdot\frac{x}{y}+z\cdot\frac{y}{z}+x\cdot\frac{z}{x}\right)$

$=f(x+y+z)=f(1)=1$. $\square$

例2 (KMO冬令营选拔, 2001) $a, b, c>0$. 求证:

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}\geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}.$$

解答 同除 abc,

原式 $\iff \sqrt{\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}\right)}\geq 1+\sqrt[3]{\left(\frac{a^2}{bc}+1\right)\left(\frac{b^2}{ca}+1\right)\left(\frac{c^2}{ab}+1\right)}$.

经代换 $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$, 有 $xyz=1$,

原式 $\iff \underbrace{\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}}_{=\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}}\geq 1+\sqrt[3]{\left(\frac{x}{z}+1\right)\left(\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{z}{y}+1\right)}$.

而 $\left(\frac{x+z}{z}\right)\left(\frac{y+x}{x}\right)\left(\frac{z+y}{y}\right)=1\cdot(z+x)(x+y)(y+z)$.

$(x+y+z)(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

$=(x+y)(y+z)(z+x)+1$.

设 $p=\sqrt[3]{(x+y)(y+z)(z+x)}$.

原式 $\iff \sqrt{p^3+1}\geq 1+p$.

$$\text{AM-GM} \Rightarrow \ p \geq \sqrt[3]{2\cdot\sqrt{xy}\cdot 2\sqrt{yz}\cdot 2\sqrt{zx}} = 2$$

$$\Rightarrow (p^3+1)-(1+p)^2 = p(p+1)(p+2) \geq 0. \qquad \square$$

例3 (IMO 1999, P2) $n \geq 2$.

求最小的常数 C 使得 $\forall x_1, \cdots, x_n \geq 0$,

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4.$$

并给出等号成立条件.

解答 · $x_1 = \cdots = x_n = 0 \Rightarrow C \geq 0$ 即可.

设 $x_1 + \cdots + x_n > 0$. 原式齐次 $\Rightarrow$ 可设 $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

记

$$\begin{aligned} F(x_1, \cdots, x_n) &= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \\ &= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i^3 x_j + x_i x_j^3 \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} x_i^3 \sum_{j\neq i} x_j \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} x_i^3 (1-x_i) \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} x_i (x_i^2 - x_i^3). \end{aligned}$$

断言 $C = \frac{1}{8}$, 这只须证

$$F(x_1, \cdots, x_n) \leq \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \cdots, 0\right).$$

(引理 $0 \leq x \leq y \leq \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 - x^3 \leq y^2 - y^3$

证明 $x+y \leq 1 \Rightarrow x+y \geq (x+y)^2 \geq x^2 + xy + y^2$

$y - x \geq 0 \Rightarrow y^2 - x^2 \geq y^3 - x^3 \Leftrightarrow y^2 - y^3 \geq x^2 - x^3$. $\square$)

(1) 设 $\frac{1}{2} \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$

$$\sum_{i=1}^n x_i (x_i^2 - x_i^3) \leq \sum_{i=1}^n x_i \left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{8}.$$

(2) 设 $x_1 \geq \frac{1}{2} \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$. 记 $x_1 = x$, $y = 1 - x = x_2 + \cdots + x_n$.

由 $y \geq x_2, \cdots, x_n$,

$$F(x_1, \cdots, x_n) = x^3 y + \sum_{i=2}^n x_i (x_i^2 - x_i^3)$$

$$\le x^3 y + \sum_{i=2}^{n} x_i (y^2 - y^3)$$
$$= x^3 y + y(y^2 - y^3)$$
$$= xy(x^2 + y^2)$$

$\rightsquigarrow$ 只须证 $xy(x^2+y^2) \le \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(x+y)^4$

$\Leftrightarrow$ $(x+y)^4 - 8xy(x^2+y^2) = (x-y)^4 \ge 0$. $\square$

练习（IMO 预选，1991） $n \ge 2$. $x_1, \cdots, x_n \ge 0$, $x_1 + \cdots + x_n = 1$.

求 $\sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j (x_i + x_j)$ 的最大值.

下面，我们给出 Nesbitt 的多种证明：

例4 (Nesbitt) $a, b, c > 0$, 有
$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}.$$

解答1（累计第7种解答）

齐次 $\Rightarrow$ 正则化为 $a+b+c=1$, $0 < a, b, c < 1$.

$\rightsquigarrow$ 原式 $\Leftrightarrow$ $\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \sum_{cyc} f(a) \ge \frac{3}{2}$.

$f(t) = \frac{t}{1-t}$. 在 $(0,1)$ 凸.

Jensen $\Rightarrow$ $f(a) + f(b) + f(c) \ge 3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$. $\square$

解答2 不妨设 $a+b+c=1$.

$\Rightarrow$ $ab+bc+ca \le \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = \frac{1}{3}$.

我们证明更强结论：
$$\sum_{cyc} \frac{c}{a+b} \ge 3 - \frac{9}{2}(ab+bc+ca) \quad \left(\ge 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\right).$$
$$\Leftarrow \quad \sum_{cyc}\left(\frac{a}{b+c} + \frac{9}{4}a(b+c)\right) \ge \sum_{cyc} 2\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{9}{4}a(b+c)}$$
$$= 3(a+b+c) = 3. \quad \square$$

解答3 不妨设 $a \geq b \geq c$，$x = \frac{a}{c}$，$y = \frac{b}{c}$ $\Rightarrow$ $x \geq y \geq 1$.

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}+1} + \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}+1} + \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y}.$$

$$\text{均值} \Rightarrow \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{x+1} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} \geq 2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}.$$

只须证 $2 - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{x+y}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{y+1} \geq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y-1}{2(1+y)} \geq \frac{y-1}{(x+1)(x+y)}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+1)(x+y)}_{\geq (y+1)^2} \geq 2(1+y) \quad \text{ok} \quad (x \geq y \geq 1). \qquad \square$$

这个证明的本质是引入正则化 $c=1$.（等价于局部调整至 $c=1$）.

解答4 可设 $c=1$，$a \geq b \geq 1$.

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{a}{b+1} + \frac{b}{a+1} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

$A = a+b$，$B = ab$，

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2+a+b}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{A^2-2B+A}{A+B+1} + \frac{1}{A} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2A^3 - 2BA + A^2 + A + B + 1 \geq \frac{3}{2}(A^2 + AB + A)$$

$$\Leftrightarrow 2A^3 - A^2 - A + 2 \geq B(7A-2).$$

有 $7A - 2 > 2(a+b-1) > 0$，$A^2 = (a+b)^2 \geq 4ab = 4B$

只须证 $4(2A^3 - A^2 - A + 2) \geq A^2(7A-2)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{A^3 - 2A^2 - 4A + 8}_{= (A-2)^2(A+2)} \geq 0 \qquad \square$$