Cauchy-Schwarz 不等式 和 Hölder 不等式

<u>定理1</u> $\forall a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{R}$,

$$(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)\geq(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2.$$

<u>证明</u> $A=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$, $B=\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$.

若 $A=0$, $a_1=\cdots=a_n=0$, ok.

$\leadsto$ 下设 $A,B>0$.

正则化为 $1=a_1^2+\cdots+a_n^2=b_1^2+\cdots+b_n^2$.

$\leadsto$ 原式 $\Leftrightarrow$ $|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leq 1$.

而 $|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leq|a_1b_1|+\cdots+|a_nb_n|$ (三角)

均值 $\Rightarrow$ $\leq\frac{a_1^2+b_1^2}{2}+\cdots+\frac{a_n^2+b_n^2}{2}=1.$ $\square$

(附了道习题, 见网页).

<u>例1</u> (伊朗, 1998) $x,y,z>1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$.

求证: $\sqrt{x+y+z}\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}$.

<u>解答</u> 注意 $\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}=1$.

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$

$$\sqrt{x+y+z}=\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)}$$

$$\geq\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1}.\quad\square$$

<u>例2</u> (Nesbitt) $a,b,c>0$, 求证

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

<u>解答</u> Cauchy-Schwarz

$$\Rightarrow\ ((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)\geq 3^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3+\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \geq \frac{9}{2}. \qquad \square$$

解答2 Cauchy-Schwarz

$$\Rightarrow \left(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)\left(\sum_{cyc}a(b+c)\right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geq \frac{3}{2}$$

因为 $(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \quad a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca. \qquad \square$$

例3 (Gazeta Matematică) $a,b,c>0$. 求证

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} \geq \sum_{cyc}a\sqrt{2a^2+bc}.$$

解答

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^4+a^2b^2+b^4} = \sum_{cyc}\sqrt{\left(a^4+\frac{a^2b^2}{2}\right)+\left(\frac{a^2b^2}{2}+b^4\right)}.$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\left(\sqrt{a^4+\frac{a^2b^2}{2}}+\sqrt{b^4+\frac{a^2b^2}{2}}\right)$$

$$\left(\text{Cauchy-Schwarz}: (1+1)(x+y) \geq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{x+y} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}.\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\left(\sqrt{a^4+\frac{a^2b^2}{2}}+\sqrt{a^4+\frac{a^2c^2}{2}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt[4]{\left(a^4+\frac{a^2b^2}{2}\right)\left(a^4+\frac{a^2c^2}{2}\right)} \qquad \text{(AM-GM)}$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt{a^4+\frac{a^2bc}{2}}. \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)}$$

$$= \sum_{cyc}\sqrt{2a^4+a^2bc}. \qquad \square$$

例4（KMO冬令营，2001）$a,b,c>0$，证明

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \geq abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}.$$

解答

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\big(b(a^2+bc)+c(b^2+ca)+a(c^2+ab)\big)\big(c(a^2+bc)+a(b^2+ca)+b(c^2+ab)\big)} \\
&\geq \frac{1}{2}\big(\sqrt{bc}\,(a^2+bc)+\sqrt{ca}\,(b^2+ca)+\sqrt{ab}\,(c^2+ab)\big) \qquad \text{(Cauchy-Schwarz)} \\
&\geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sqrt{bc}\,(a^2+bc)\cdot\sqrt{ca}\,(b^2+ca)\cdot\sqrt{ab}\,(c^2+ab)} \qquad \text{(AM-GM)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)} \\
&\geq \frac{1}{2}\sqrt[3]{2\sqrt{a^3\cdot abc}\cdot 2\sqrt{b^3\cdot abc}\cdot 2\sqrt{c^3\cdot abc}} \\
&\qquad +\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)} \qquad \text{(AM-GM)} \\
&= abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}. \qquad \square
\end{aligned}$$

正则化方法可以用来证明许多经典结论.

定理2（多元组 Cauchy-Schwarz）$a_{ij}>0\ (i,j=1,\cdots,n)$

则 $$(a_{11}^n+\cdots+a_{1n}^n)\cdots(a_{n1}^n+\cdots+a_{nn}^n) \geq (a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn})^n.$$

证明 类似二元组，正则化到

$$(a_{i1}^n+\cdots+a_{in}^n)^{\frac{1}{n}}=1 \iff a_{i1}^n+\cdots+a_{in}^n=1.\quad (i=1,\cdots,n).$$

$\leadsto$ 原式 $\iff a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{nn}\leq 1$

而 $$\text{LHS} \leq \frac{1}{n}(a_{11}^n+\cdots+a_{n1}^n)+\cdots+\frac{1}{n}(a_{1n}^n+\cdots+a_{nn}^n)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}^n\Big)=\frac{1}{n}\cdot n=1. \qquad \square$$

以上用到多元 AM-GM：

定理3（AM-GM）$a_1,\cdots,a_n>0$，则

$$a_1+\cdots+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

证明 正则化：$a_1\cdots a_n=1$.

$\rightsquigarrow$ 原式 $\Longleftrightarrow a_1+\cdots+a_n\geqslant n$.

对 n 归纳：$n=1$ 成立，

$n=2$：$a_1a_2=1$，$a_1+a_2=a_1+\frac{1}{a_1}\geqslant 2$.

$\Longleftrightarrow a_1+a_2-2\sqrt{a_1a_2}=(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2\geqslant 0$.

假设对 $n\geqslant 2$ 成立，则对 $n+1$：

$a_1\cdots a_n\cdot a_{n+1}=1$，不妨设 $a_1\geqslant 1\geqslant a_2$，用局部调整

$\Rightarrow a_1a_2+1-a_1-a_2=(a_1-1)(a_2-1)\leqslant 0$

$\Leftrightarrow a_1a_2+1\leqslant a_1+a_2$.

而 $(a_1a_2)\cdot a_3\cdots a_{n+1}=1$ （视为 n 项之积）

$\Rightarrow a_1a_2+a_3+\cdots+a_{n+1}\geqslant n$

$\Rightarrow (a_1+a_2-1)+a_3+\cdots+a_{n+1}\geqslant n$

$\Rightarrow a_1+\cdots+a_{n+1}\geqslant n+1$. $\square$

观察 $a,b>0$，$x_1=\cdots=x_m=a$，$x_{m+1}=\cdots=x_{m+n}=b$.

AM-GM $\Rightarrow \dfrac{ma+nb}{m+n}\geqslant (a^m b^n)^{\frac{1}{m+n}}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{m}{m+n}\cdot a+\dfrac{n}{m+n}b\geqslant a^{\frac{m}{m+n}}\cdot b^{\frac{n}{m+n}}$.

$\rightsquigarrow \omega_1,\omega_2\in\mathbb{Q}$，$\omega_1+\omega_2=1$

则 $\omega_1a+\omega_2b\geqslant a^{\omega_1}b^{\omega_2}$.

更一般地，对 $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{R}$：

定理4 $\omega_1,\omega_2>0$，$\omega_1+\omega_2=1$. $a,b>0$.

则 $\omega_1a+\omega_2b\geqslant a^{\omega_1}b^{\omega_2}$.

证明 取 $\{a_n\}$. $a_i\in\mathbb{Q}_{>0}$，s.t. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\omega_1$.

取 $\{b_n\}=\{1-a_n\}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}b_n=\omega_2$.

则 $a_n x + b_n y \geq x^{a_n} y^{b_n}$.

两侧取极限即可. $\square$

<u>定理5</u> (加权 AM-GM) $\omega_1, \cdots, \omega_n > 0$, $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$.

$\forall x_1, \cdots, x_n > 0$, 有

$$\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n \geq x_1^{\omega_1} \cdots x_n^{\omega_n}.$$

<u>补注</u> 原式 $\Leftrightarrow \ln(\omega_1 x_1 + \cdots + \omega_n x_n) \geq \omega_1 \ln x_1 + \cdots + \omega_n \ln x_n$.

这是 $\ln x$ 的凹性给出的.

<u>定理6</u> (加权 Cauchy-Schwarz, 即 Hölder)

$x_{ij} > 0$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

$\omega_1, \cdots, \omega_n > 0$, $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$.

则
$$\prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j} \right).$$

<u>证明</u> 正则化: $x_{1j} + \cdots + x_{mj} = 1$, $j = 1, \cdots, n$.

原式 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j} \right) \leq 1$.

加权 AM-GM $\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_{ij} \geq \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j}$, $\forall i = 1, \cdots, m$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_{ij} \geq \sum_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j}$$

但 $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \omega_j x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} \omega_j x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \right)$

$$= \omega_1 + \cdots + \omega_n = 1. \quad \square$$