不等式专题

CAUCHY–SCHWARZ 不等式 补充习题

戴文晗

下列习题几乎都是 Cauchy–Schwarz 不等式的直接应用, 难度较低. 因此不再单独更新解答. 这些习题的意义在于使同学们见识 Cauchy–Schwarz 的各种使用场景.

问题 1 (Lagrange 等式)**.** 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(a_i b_j-a_j b_i\right)^2 .$$

问题 2 (Darij Grinberg)**.** 设 $0<a_1\leqslant\cdots\leqslant a_n$ 和 $0<b_1\leqslant\cdots\leqslant b_n$ 均为实数, 求证

$$\frac{1}{4}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)^2>\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 .$$

问题 3 (S. S. Wagner)**.** 令 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 为实数. 设 $x\in[0,1]$. 求证

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2+2x\sum_{i<j} a_i a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2+2x\sum_{i<j} b_i b_j\right)\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i+x\sum_{i\leqslant j} a_i b_j\right)^2 .$$

问题 4. 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 是正实数. 求证

$$\sqrt{\left(a_1+\cdots+a_n\right)\left(b_1+\cdots+b_n\right)}\geqslant\sqrt{a_1 b_1}+\cdots+\sqrt{a_n b_n}.$$

问题 5. 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 是正实数. 求证

$$\frac{a_1^2}{b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}\geqslant\frac{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^2}{b_1+\cdots+b_n}.$$

问题 6. 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 是正实数. 求证

$$\frac{a_1}{b_1^2}+\cdots+\frac{a_n}{b_n^2}\geqslant\frac{1}{a_1+\cdots+a_n}\left(\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\right)^2 .$$

问题 7. 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 是正实数. 求证

$$\frac{a_1}{b_1}+\cdots+\frac{a_n}{b_n}\geqslant\frac{\left(a_1+\cdots+a_n\right)^2}{a_1 b_1+\cdots+a_n b_n}.$$