幂平均

本节利用Jensen不等式引入一个重要多元函数关于幂次的单调性.

引理1 $a,b,c>0$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f'(0)=\ln(abc)^{1/3}.$$

证明 $f'(x)=\dfrac{a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c}{a^x+b^x+c^x}$.

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{1}{3}(\ln a+\ln b+\ln c)=\frac{1}{3}\ln(abc). \qquad \square$$

引理2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 连续. 设 f 在 $(0,\infty)\uparrow$, $(-\infty,0)\uparrow$.

则 f 在 $\mathbb{R}$ 上 $\uparrow$.

证明 先证 f 在 $[0,\infty)\uparrow$. 只须证 $f(x)\geq f(0)$, $\forall x>0$.

$\forall \varepsilon\in(0,x)$, $f(x)\geq f(\varepsilon)$,

f 在0处连续 $\Rightarrow f(x)\geq \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}f(\varepsilon)=f(0)$.

同理, f 在 $(-\infty,0]\uparrow$. 任取 $x,y\in\mathbb{R}$. $x<y$.

(1) $0\notin(x,y)\Rightarrow f(x)\geq f(y)$.

(2) $0\in(x,y)\Rightarrow x\geq 0\geq y\Rightarrow f(x)\geq f(0)\geq f(y)$. $\square$

定理1 (幂平均, 三元) $a,b,c>0$, $M(a,b,c):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$M(a,b,c)(0)=\sqrt[3]{abc}.\quad M(a,b,c)(r)=\left(\frac{a^r+b^r+c^r}{3}\right)^{1/r},\quad r\neq 0,$$

则 $M(a,b,c)$ 连续且在 $\mathbb{R}\uparrow$.

证明一 $M(r):=M(a,b,c)(r)$. 先证连续性.

$r\neq 0$, M 连续. 只须证 $\lim\limits_{r\to 0}M(r)=\sqrt[3]{abc}$.

取 $f(x)=\ln\left(\frac{1}{3}(a^x+b^x+c^x)\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

$f(0)=0$，引理1 $\Rightarrow \lim\limits_{r\to 0}\frac{f(r)}{r}=\lim\limits_{r\to 0}\frac{f(r)-f(0)}{r-0}=f'(0)=\ln\sqrt[3]{abc}$.

而 e^x 连续

$$\Rightarrow \lim_{r\to 0}M(r)=\lim_{r\to 0}e^{\frac{f(r)}{r}}=e^{\ln\sqrt[3]{abc}}=\sqrt[3]{abc}. \qquad \text{ok}$$

下面证单调性.

引理2 $\Uparrow$ f 在 $(0,\infty)\uparrow$，$(-\infty,0)\uparrow$.

设 $x\geq y>0$，

$$f(x)\geq f(y) \iff \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\geq\left(\frac{a^y+b^y+c^y}{3}\right)^{\frac{1}{y}}.$$

$(u=a^y,\ v=b^y,\ w=c^y)$

$$\iff \left(\frac{u^{\frac{x}{y}}+v^{\frac{x}{y}}+w^{\frac{x}{y}}}{3}\right)^{\frac{1}{x}}\geq\left(\frac{u+v+w}{3}\right)^{\frac{1}{y}}. \quad (\text{齐次})$$

正则化：$u+v+w=3$，

原式 $\iff \frac{1}{3}(G(u)+G(v)+G(w))\geq 1$. $\quad G(t)=t^{\frac{x}{y}}$，$t>0$.

而 $\frac{x}{y}\geq 1 \Rightarrow G$ 凸，由Jensen，

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(G(u)+G(v)+G(w))\geq G\left(\frac{u+v+w}{3}\right)=G(1)=1.$$

类似地，可证明 f 在 $(-\infty,0)\uparrow$. $\square$

小结 可观察到 $f(x)=x^\lambda$ $(\lambda\geq 1)$ 之凸性 $\Rightarrow$ 幂平均的单调性.

下面，考虑 $x\ln x$ 之凸性 $\Rightarrow$ 幂平均的单调性.

证明：$f(x):=M_{(a,b,c)}(x)$，往证 $f'(x)\geq 0$，$\forall x\neq 0$.

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{d}{dx}(\ln f(x))=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)+\frac{1}{x}\frac{\frac{1}{3}(a^x\ln a+b^x\ln b+c^x\ln c)}{\frac{1}{3}(a^x+b^x+c^x)}.$$

$$\iff \frac{x^2f'(x)}{f(x)}=-\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)+\frac{a^x\ln a^x+b^x\ln b^x+c^x\ln c^x}{a^x+b^x+c^x}.$$

$$\leadsto f'(x)\geq 0 \iff a^x\ln a^x+b^x\ln b^x+c^x\ln c^x\geq(a^x+b^x+c^x)\ln\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)$$

设 $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$，$g(t)=t\ln t$.

则上式 $\Leftrightarrow$ $g(p)+g(q)+g(r) \geq 3f\left(\frac{p+q+r}{3}\right)$.

$$p=a^x,\ q=b^x,\ r=c^x$$

这即是 g 的凸性. □

推论1 $a,b,c>0$, 则

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geq \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}.$$

(即 $M_{(a,b,c)}(2) \geq M_{(a,b,c)}(1) \geq M_{(a,b,c)}(0) \geq M_{(a,b,c)}(-1)$).

下列定理本质上由 $x\ln x$ 或 $x^\lambda\ (\lambda \geq 1)$ 之凸性给出.

定理2 (幂平均) $x_1,\cdots,x_n>0$, 定义

$$M_{(x_1,\cdots,x_n)}(0)=\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},$$

$$M_{(x_1,\cdots,x_n)}(r)=\left(\frac{x_1^r+\cdots+x_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}},\quad r\neq 0.$$

则 $M_{(x_1,\cdots,x_n)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续单调增的.

推论2 (几何均值极限) $x_1,\cdots,x_n>0$.

则 $\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}=\lim\limits_{r\to 0} M_{(x_1,\cdots,x_n)}(r)$.

定理3 (RMS-AM-GM-HM). $x_1,\cdots,x_n>0$,

有 $$\sqrt{\frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1\cdots x_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}.$$