切线放缩

给定可微的 $f(x)$，在 $y=f(x)$ 下方的切线全构成 $f(x)$ 之下界.

但并非所有切线都在 $y=f(x)$ 下方.

<u>命题</u>（判别切线位置）$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $m,n\in\mathbb{R}$，

设 (1) $\exists\alpha\in\mathbb{R}$，$f(\alpha)=m\alpha+n$，

(2) $f(x)\geq mx+n$, $\forall x\in(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，其中 $\varepsilon_1<\alpha<\varepsilon_2$，

(3) f 在 α 处可微

则 $y=mx+n$ 是 $f(x)=y$ 在 α 处切线.

<u>证明</u> $F:(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\to\mathbb{R}$，$F(x)=f(x)-mx-n$.

$\Rightarrow F'(\alpha)=f'(\alpha)-m$.

(1)(2) $\Rightarrow$ F 在 α 有局部极小值.

$\Rightarrow 0=F'(\alpha)=f'(\alpha)-m \Rightarrow f'(\alpha)=m$.

$\Rightarrow n=f(\alpha)-m\alpha=f(\alpha)-f'(\alpha)\cdot\alpha$.

$\rightsquigarrow y=mx+n=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$. $\square$

<u>例1</u> (Nesbitt) $a,b,c>0$，求证

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

<u>解答</u>（累计第13种）

正则化 $\rightsquigarrow a+b+c=1$，$0<a,b,c<1$

原式 $\Leftrightarrow \sum_{cyc}f(a)\geq\frac{3}{2}$，$f(x)=\frac{x}{1-x}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\left(f(a)+f(b)+f(c)\right)\geq\frac{1}{2}$.

取 $f(x)$ 在 $\frac{1}{3}$ 处切线：$f(x)\geq\frac{9}{4}x-\frac{1}{4}$. $(0<x<1)$

$\Leftrightarrow f(x)-\frac{9}{4}x+\frac{1}{4}=\frac{(3x-1)^2}{4(1-x)}\geq 0$.

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a}{1-a} \geq \sum_{cyc}\frac{9}{4}a-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}\sum_{cyc}a-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}. \quad \square$$

定理1 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$，$m\in\mathbb{R}$，$\alpha\in[a,b]$，满足

$$\forall x\in[a,b],\qquad f(x)\geq m(x-\alpha)+f(\alpha).$$

设 $\omega_1,\cdots,\omega_n>0$，$\omega_1+\cdots+\omega_n=1$. 则 $\forall x_1,\cdots,x_n\in[a,b]$，

$$\begin{cases}\omega_1 f_1(x_1)+\cdots+\omega_n f(x_n)\geq f(\alpha),\\ \alpha=\omega_1x_1+\cdots+\omega_nx_n.\end{cases}$$

特别地，若 $x_1+\cdots+x_n=S\in[na,nb]$，

$$\frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n))\geq f\left(\frac{S}{n}\right).$$

证明 $\omega_1f(x_1)+\cdots+\omega_nf(x_n)$

$$\geq\omega_1(m(x_1-\alpha)+f(\alpha))+\cdots+\omega_n(m(x_n-\alpha)+f(\alpha))=f(\alpha). \quad \square$$

评论 可见Jensen不等式(或凸性)本质可解释为切线位置在$y=f(x)$下方.

引理 $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ 凸，在(a,b)二阶可微.

$y=l_\alpha(x)$：$\alpha\in(a,b)$处切线

$$\Rightarrow \forall x\in(a,b),\quad f(x)\geq l_\alpha(x).$$

证明 $\alpha\in(a,b)$，$\exists\,\alpha<\theta_x<x$ 使

$$f(x)=f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)+\frac{f''(\theta_x)}{2}(x-\alpha)^2$$

$$\geq f(\alpha)+f'(\alpha)(x-\alpha)=l_\alpha(x)$$

$$\Rightarrow \forall x\in(a,b),\quad f(x)\geq l_\alpha(x). \quad \square$$

我们还可对加权Jensen给出易证：

设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$连续凸，在(a,b)可微，$\omega_1,\cdots,\omega_n>0$，$\omega_1+\cdots+\omega_n=1$.

证明加权Jensen f 连续 $\Rightarrow$ 不妨设 $x_1,\cdots,x_n\in(a,b)$.

$$\Rightarrow \mu=\omega_1x_1+\cdots+\omega_nx_n\in(a,b).$$

引理 $\Rightarrow f(x)\geq l_\mu(x)=f'(\mu)(x-\mu)+f(\mu)$, $\forall x\in(a,b)$

$$\Rightarrow \omega_1f(x_1)+\cdots+\omega_nf(x_n)$$
$$\geq \omega_1(f'(\mu)(x_1-\mu)+f(\mu))+\cdots+\omega_n(f'(\mu)(x_n-\mu)+f(\mu))$$
$$=f(\mu)=f(\omega_1x_1+\cdots+\omega_nx_n). \qquad \square$$

注意 $\cos x$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 凹，在 $[\frac{\pi}{2},\pi]$ 凸.

但 非凸函数可以是局部凸的.

定理2 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$

易证 $f(x)=-\cos x$,

原式 $\Leftrightarrow \frac{1}{3}(f(A)+f(B)+f(C))\geq f(\frac{\pi}{3})$,

$A,B,C\in(0,\pi)$, $A+B+C=\pi$.

有 $f'(x)=\sin x$, 则 $l_{\frac{\pi}{3}}(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow -\cos x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{3})-\frac{1}{2}, \quad \forall 0<x<\pi.$$

此后 $\frac{1}{3}(f(A)+f(B)+f(C))$

$$\geq\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\left((A-\frac{\pi}{3})+(B-\frac{\pi}{3})+(C-\frac{\pi}{3})\right)-\frac{3}{2}\right)=-\frac{1}{2}. \qquad \square$$

例2 (日本, 1997) $a,b,c>0$, 求证

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\geq\frac{3}{5}.$$

解答 正则化到 $a+b+c=1$.

原式 $\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}\geq\frac{3}{5}$

$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{2a^2-2a+1}\leq\frac{27}{5}$.

取 $f(x)=(2x^2-2x+1)^{-1}$,

$\Rightarrow \ l_{\frac{1}{3}}(x) = \frac{54}{25}x + \frac{27}{25}$，且

$$f(x) - \left(\frac{54}{25}x + \frac{27}{25}\right) = -\frac{2}{25} \cdot \frac{(3x-1)^2(6x+1)}{2x^2-2x+1} \leq 0, \quad \forall x > 0.$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{cyc} f(a) \leq \sum_{cyc} \frac{54}{25}a + \frac{27}{25} = \frac{27}{5}. \qquad \square$$

（课程完）