不等式专题

习题集合订本

HOJOO LEE 编

(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (IMO 预选, 2003)**.** 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 和 $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 是两个正实数序列. 设 $(z_1, z_2, \cdots, z_n)$ 是另一个正实数序列且满足

$$z_{i+j}^2 \geqslant x_i y_j$$

对所有 $1 \leqslant i, j \leqslant n$ 成立. 令 $M = \max\{z_2, \cdots, z_{2n}\}$. 求证

$$\left(\frac{M + z_2 + \cdots + z_{2n}}{2n}\right)^2 \geqslant \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)\left(\frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}\right).$$

问题 2 (波斯尼亚和黑塞尔维亚, 2002)**.** 设 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n, c_1, \cdots, c_n$ 为正实数. 证明下列不等式:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^n c_i^3\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i\right)^3.$$

问题 3 (C2113, Marcin E. Kuczma)**.** 对任意正实数 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$, 证明不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \geqslant \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{a_i + b_i}.$$

问题 4 (南斯拉夫, 1998)**.** 设 $n > 1$ 是正整数且 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$ 是正实数. 证明下列不等式成立:

$$\left(\sum_{i \neq j} a_i b_j\right)^2 \geqslant \sum_{i \neq j} a_i a_j \sum_{i \neq j} b_i b_j.$$

问题 5 (C2176, Sefket Arslanagic)**.** 证明:

$$((a_1+b_1)\cdots(a_n+b_n))^{\frac{1}{n}} \geqslant (a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n>0$.

问题 6 (韩国, 2001)**.** 设 $x_1,\cdots,x_n$ 和 $y_1,\cdots,y_n$ 是满足

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=y_1^2+\cdots+y_n^2=1$$

的实数. 证明

$$2\left|1-\sum_{i=1}^{n} x_iy_i\right| \geqslant (x_1y_2-x_2y_1)^2$$

并求出等号成立的充分必要条件.

问题 7 (新加坡, 2001)**.** 设 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$ 是介于 1001 和 2002 (含端点) 之间的实数. 设

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

求证:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{b_i} \leqslant \frac{17}{10}\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

并求出等号成立的充分必要条件.

问题 8 (Abel 不等式)**.** 设 $a_1,\cdots,a_N,x_1,\cdots,x_N$ 是使得 $x_n \geqslant x_{n+1}>0$ 对所有 n 成立的实数. 求证

$$|a_1x_1+\cdots+a_Nx_N| \leqslant Ax_1,$$

其中

$$A=\max\{|a_1|,|a_1+a_2|,\cdots,|a_1+\cdots+a_N|\}.$$

问题 9 (中国, 1992)**.** 对任意整数 $n\geqslant 2$, 求最小的满足下列条件的正实数 $\lambda=\lambda(n)$: 如果

$$0\leqslant a_1,\cdots,a_n\leqslant \frac{1}{2},\quad b_1,\cdots,b_n>0,\quad a_1+\cdots+a_n=b_1+\cdots+b_n=1,$$

则

$$b_1\cdots b_n \leqslant \lambda(a_1b_1+\cdots+a_nb_n).$$

问题 10 (C2551, Panos E. Tsaoussoglou)**.** 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为正数. 设 $e_{j,k}=n-1$ 在 $j=k$ 时成立, 否则 $e_{j,k}=n-2$. 设 $d_{j,k}=0$ 在 $j=k$ 时成立, 否则 $d_{j,k}=1$. 证明

$$\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n} e_{j,k}a_k^2 \geqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} d_{j,k}a_k\right)^2.$$

问题 11 (C2627, Walther Janous)**.** 设 $x_1,\cdots,x_n(n\geqslant 2)$ 为正实数且 $x_1+\cdots+x_n$. 设 $a_1,\cdots,a_n$ 为非负实数. 求最大的 $C(n)$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j\left(s_n-x_j\right)}{x_j}\geqslant C(n)\left(\prod_{j=1}^{n}a_j\right)^{\frac{1}{n}}.$$

问题 12 (匈牙利–以色列两国数学竞赛, 2000)**.** 设 k 和 l 是给定的正整数, 设 $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant k,1\leqslant j\leqslant l)$ 为正数. 证明: 如果 $q\geqslant p>0$, 则

$$\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{k}a_{ij}^{p}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{l}a_{ij}^{q}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

问题 13 (Kantorovich 不等式)**.** 设 $x_1<\cdots<x_n$ 是给定的正数, 且 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$ 和 $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=1$ 成立. 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{x_i}\right)\leqslant\frac{A^2}{G^2},$$

其中 $A=\frac{x_1+x_n}{2}$ 且 $G=\sqrt{x_1x_n}$.

问题 14 (捷克–斯洛伐克–波兰竞赛, 2001)**.** 设 $n\geqslant 2$ 为整数, 求证

$$\left(a_1^3+1\right)\left(a_2^3+1\right)\cdots\left(a_n^3+1\right)\geqslant\left(a_1^2a_2+1\right)\left(a_2^2a_3+1\right)\cdots\left(a_n^2a_1+1\right)$$

对所有非负实数 $a_1,\cdots,a_n$ 成立.

问题 15 (C1868, De-jun Zhao)**.** 设 $n\geqslant 3$, $a_1>a_2>\cdots>a_n>0$, 且 $p>q>0$. 证明

$$a_1^pa_2^q+a_2^pa_3^q+\cdots+a_{n-1}^pa_n^q+a_n^pa_1^q\geqslant a_1^qa_2^p+a_2^qa_3^p+\cdots+a_{n-1}^qa_n^p+a_n^qa_1^p.$$

问题 16 (波罗的海, 1996)**.** 求出使下列不等式对任意整数 $n>2$ 和正实数 $x_1,\cdots,x_n$ 成立的 a,b:

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\geqslant x_1^ax_2^bx_3^a+x_2^ax_3^bx_4^a+\cdots+x_n^ax_1^bx_2^a.$$

问题 17 (IMO 预选, 2000)**.** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是任意实数. 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2}<\sqrt{n}.$$

问题 18 (MM1479, Donald E. Knuth)**.** 设 M_n 是下式关于所有非负实数 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的最大值

$$\frac{x_n}{\left(1+x_1+\cdots+x_n\right)^2}+\frac{x_2}{\left(1+x_2+\cdots+x_n\right)^2}+\cdots+\frac{x_1}{\left(1+x_n\right)^2}.$$

求出最大值点, 将 M_n 用 M_{n-1} 表示出来, 并求 $\lim_{n\to\infty}M_n$.

问题 19 (IMO 1971)**.** 证明下列命题对 $n=3$ 和 $n=5$ 成立, 但对其余 $n>2$ 不成立: 如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是任意实数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)\geqslant 0.$$

问题 20 (IMO 2003)**.** 设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 为实数.

(1) 求证

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(x_i-x_j\right)^2.$$

(2) 证明上式等号成立当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成等差数列.

问题 21 (保加利亚, 1995)**.** 设 $n\geqslant 2$ 且 $0\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant 1$. 求证

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$$

并给出等号成立条件.

问题 22 (MM1407, M. S. Klamkin)**.** 给出下列和的最大值

$$x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p-x_1^qx_2^r-x_2^qx_3^r-\cdots x_n^qx_1^r,$$

其中 p,q,r 使得 $p\geqslant q\geqslant r\geqslant 0$ 且 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ 对任意 i 成立.

问题 23 (IMO 预选, 1998)**.** 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正实数且使得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n<1.$$

求证

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n\left(1-(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right)}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(1-a_1\right)\left(1-a_2\right)\cdots\left(1-a_n\right)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

问题 24 (IMO 预选, 1998)**.** 设 $r_1,r_2,\cdots,r_n\geqslant 1$. 证明

$$\frac{1}{r_1+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\geqslant\frac{n}{\left(r_1\cdots r_n\right)^{\frac{1}{n}}+1}.$$

问题 25 (波罗的海, 1991)**.** 证明对任意实数 $a_1,\cdots,a_n$,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{a_ia_j}{i+j-1}\geqslant 0.$$

问题 26 (印度, 1995)**.** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是和为 1 的正实数. 证明

$$\frac{x_1}{1-x_1}+\cdots+\frac{x_n}{1-x_n}\geqslant\sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

问题 27 (土耳其, 1997). 给定整数 $n \geqslant 2$, 对于满足 $x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ 的正实数 $x_1,\cdots,x_n$, 求

$$\frac{x_1^5}{x_2+x_3+\cdots+x_n}+\frac{x_2^5}{x_3+\cdots+x_n+x_1}+\cdots\frac{x_n^5}{x_1+x_3+\cdots+x_{n-1}}$$

的最小值.

问题 28 (中国, 1996). 设 $n\in\mathbb{N}$, $x_0=0, x_1,\cdots,x_n>0$, 且 $x_1+\cdots+x_n=1$. 求证

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}}<\frac{\pi}{2}.$$

问题 29 (越南, 1998). 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是满足

$$\frac{1}{x_1+1998}+\cdots+\frac{1}{x_n+1998}=\frac{1}{1998}.$$

的正实数. 证明

$$\frac{(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n-1}\geqslant 1998.$$

问题 30 (C2768 Mohammed Aassila). 设 $x_1,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数, 证明

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2+x_2^2}}+\frac{x_2}{\sqrt{x_2x_3+x_3^2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{x_nx_1+x_1^2}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{2}}.$$

问题 31 (C2842, George Tsintsifas). 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是正实数.

(1) 求证

$$\frac{x_1^n+\cdots+x_n^n}{nx_1\cdots x_n}+\frac{n\left(x_1\cdots x_n\right)^{\frac{1}{n}}}{x_1+\cdots+x_n}\geqslant 2,$$

(2) 求证

$$\frac{x_1^n+\cdots+x_n^n}{x_1\cdots x_n}+\frac{(x_1\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_1+\cdots+x_n}\geqslant 1.$$

问题 32 (C2423, Walther Janous). 设 $x_1,\cdots,x_n$ $(n\geqslant 2)$ 是使得 $x_1+\cdots+x_n=1$ 成立的正实数. 求证

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant\left(\frac{n-x_1}{1-x_1}\right)\cdots\left(\frac{n-x_n}{1-x_n}\right)$$

并给出等号成立条件.

问题 33 (C1851, Walther Janous). 设 $x_1,\cdots,x_n$ $(n\geqslant 2)$ 是正实数且满足

$$x_1^2+\cdots+x_n^2=1.$$

证明

$$\frac{2\sqrt{n}-1}{5\sqrt{n}-1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{2+x_i}{5+x_i}\leqslant\frac{2\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+1}.$$

问题 34 (C1429, D. S. Mitirinovic, J. E. Pecaric). 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leqslant n-1$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $n \geqslant 3$ 个正实数, 且记 $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.[1]

问题 35 (白罗斯, 1998, S. Sobolevski). 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是正实数, 证明:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

以及

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{2k}{1+k^2} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

其中 $k = \frac{a_n}{a_1}$.

问题 36 (香港, 2000). 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是 n 个满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

的实数. 证明

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + na_1a_n \leqslant 0.$$

问题 37 (波兰, 2001). 设整数 $n \geqslant 2$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i + \binom{n}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} ix_i$$

对所有非负实数 $x_1, \cdots, x_n$ 成立.

问题 38 (韩国, 1997). 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为正实数, 定义

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, G = (a_1 \cdots {}_n)^{\frac{1}{n}}, H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(1) 若 n 为偶数, 证明

$$\frac{A}{H} \leqslant -1 + 2\left(\frac{A}{G}\right)^n.$$

(2) 若 n 为奇数, 证明

$$\frac{A}{H} \leqslant -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n}\left(\frac{A}{G}\right)^n.$$

[1]本题被译者修改, 原版本要求证明

$$\sup_{x_1, \cdots, x_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} = n-1.$$

问题 39 (罗马尼亚, 1996)**.** 设 $x_1,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 是正实数且使得

$$x_{n+1}=x_1+\cdots+x_n.$$

求证

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i\left(x_{n+1}-x_i\right)}\leqslant\sqrt{x_{n+1}\left(x_{n+1}-x_i\right)}.$$

问题 40 (C2730, Peter Y. Woo)**.** 以 $\mathrm{AM}\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ 和 $\mathrm{GM}\left(x_1,\cdots,x_n\right)$ 分别表示正实数 $x_1,\cdots,x_n$ 的算术平均值和几何平均值. 给定正实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$.

(1) 证明

$$\mathrm{GM}\left(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n\right)\geqslant\mathrm{GM}\left(a_1,\cdots,a_n\right)+\mathrm{GM}\left(b_1,\cdots,b_n\right).$$

对任意实数 $t\geqslant 0$, 定义

$$f(t)=\mathrm{GM}\left(t+b_1,t+b_2,\cdots,t+b_n\right)-t.$$

(2) 证明 f 是单调递增函数, 且

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\mathrm{AM}\left(b_1,\cdots,b_n\right).$$

问题 41 (C1578, O. Johnson, C. S. Goodlad)**.** 对给定的正实数 a_n, 求下式关于一切正实数 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的最大值:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{\left(1+a_1\right)\left(a_1+a_2\right)\left(a_2+a_3\right)\cdots\left(a_{n-1}+a_n\right)}.$$

问题 42 (C1630, Isao Ashiba)**.** 对 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的所有排列 $a_1,\cdots,a_{2n}$, 求

$$a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}$$

的最大值.

问题 43 (C1662, M. S. Klamkin)**.** 证明

$$\frac{x_1^{2r+1}}{s-x_1}+\frac{x_2^{2r+1}}{s-x_2}+\cdots\frac{x_n^{2r+1}}{s-x_n}\geqslant\frac{4^r}{(n-1)n^{2r-1}}\left(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1\right)^r$$

其中对于所有 i 有 $n>3$, $r\geqslant\frac{1}{2}$, $x_i\geqslant 0$, 以及 $s=x_1+\cdots+x_n$. 找出一组 s,r 使得不等号严格成立.

问题 44 (C1674, M. S. Klamkin)**.** 给定正实数 r,s 以及整数 $n>\frac{r}{s}$, 求使得

$$\left(\frac{1}{x_1^r}+\frac{1}{x_2^r}+\cdots+\frac{1}{x_{n^r}^r}\right)\left(1+x_1\right)^s\left(1+x_2\right)^s\cdots\left(1+x_n\right)^s$$

最小的正实数 $x_1,\cdots,x_n$.

问题 45 (C1691, Walther Janous). 设 $n \geqslant 2$. 求

$$\frac{x_1}{x_2x_3\cdots x_n+1}+\frac{x_2}{x_1x_3\cdots x_n+1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}+1}$$

关于 $x_1,\cdots,x_n \in [0,1]$ 的最佳上界.

问题 46 (C1892, Marcin E. Kuczma). 设 $n \geqslant 4$ 是整数, $x_1,\cdots,x_n$ 是使得 $x_{i-1}+x_i+x_{i+1}>0$ 对任意 i 成立的非负实数. 求出下列轮换和的上界和下界

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}}.$$

并对于两种情形分别给出取等条件.

问题 47 (C1953, M. S. Klamkin). 求实数 $r_1,\cdots,r_n$ 需要满足的充分必要条件, 使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdot+x_n^2 \geqslant (r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)^2$$

对所有实数 $x_1,\cdots,x_n$ 成立.

问题 48 (C2018, Marcin E. Kuczma). 求 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的重排列 $(x_1,\cdots,x_n)$ 的数量, 使得下列轮换和

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|$$

分别取最大值和最小值.

问题 49 (C2214, Walther Janous). 设 $n \geqslant 2$ 是自然数, 证明存在常数 $C=C(n)$ 使得对任意 $x_1,\cdots,x_n \geqslant 0$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i} \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(x_i+C)}.$$

对给定的 n, 求最小的 $C(n)$. (例如 $C(2)=1$.)

问题 50 (C2615, M. S. Klamkin). 设 $x_1,\cdots,x_n$ 是使得下式成立的非负实数

$$\sum_{\text{sym}}x_i^2\sum_{\text{sym}}(x_ix_{i+1})^2=\frac{n(n+1)}{2},$$

(1) 求 $\sum_{\text{sym}}x_i$ 的最大值.

(2) 判断 $\sum_{\text{sym}}x_i$ 的最小值是否是 $\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, 并给出证明.

问题 51 (土耳其, 1996). 给定实数 $0=x_1<x_2<\cdots<x_{2n},x_{2n+1}=1$ 且设 $x_{i+1}-x_i \leqslant h$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都成立, 求证

$$\frac{1-h}{2}<\sum_{i=1}^{n}x_{2i}(x_{2i+1}-x_{2i-1})<\frac{1+h}{2}.$$

问题 52 (波兰, 2002)**.** 证明对任意整数 $n \geqslant 3$ 以及任意正数序列 $x_1, \cdots, x_n$, 下列两个不等式中至少有一者成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1}+x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2}.$$

其中 $x_{n+1}=x_1,\ x_{n+2}=x_2,\ x_0=x_n,\ x_{-1}=x_{n-1}$.

问题 53 (中国, 1997)**.** 设 $x_1, \cdots, x_{1997}$ 是满足下列条件的实数

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_1, \cdots, x_{1997} \leqslant \sqrt{3}, \quad x_1+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}.$$

求 $x_1^{12}+\cdots+x_{1997^{12}}$ 的最大值.

问题 54 (C2673, George Baloglou)**.** 给定整数 $n>1$.

(1) 证明

$$(1+a_1\cdots a_n)^n \geqslant a_1\cdots a_n\left(1+a_1^{n-2}\right)\cdots\left(1+a_1^{n-2}\right)$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n \in [1, \infty)$ 成立当且仅当 $n \geqslant 4$.

(2) 证明

$$\frac{1}{a_1\left(1+a_2^{n-2}\right)}+\frac{1}{a_2\left(1+a_3^{n-2}\right)}+\cdots+\frac{1}{a_n\left(1+a_1^{n-2}\right)} \geqslant \frac{n}{1+a_1\cdots a_n}$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n>0$ 成立当且仅当 $n \leqslant 3$.

(3) 证明

$$\frac{1}{a_1\left(1+a_1^{n-2}\right)}+\frac{1}{a_2\left(1+a_2^{n-2}\right)}+\cdots+\frac{1}{a_n\left(1+a_n^{n-2}\right)} \geqslant \frac{n}{1+a_1\cdots a_n}$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n>0$ 成立当且仅当 $n \leqslant 8$.

问题 55 (C2557, Gord Sinnamon, Hans Heinig)**.**

(1) 证明对所有正实数序列 $\{x_i\}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} x_i \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2 \frac{1}{x_k}.$$

(2) 去掉因子 2, 上述不等式是否还成立?

(3) 求最小的常数 c, 使得用 c 替换上式中 2 的位置后, 不等式仍然成立.

问题 56 (C1472, Walther Janous)**.** 对每个整数 $n \geqslant 2$, 求最大的常数 C_n 使得

$$C_n \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} |a_i-a_j|$$

对所有满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i=0$ 的实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

问题 57 (中国, 2002)**.** 给定 $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 求最小的常数 M, 使得对任意 $n \geqslant 2$ 以及实数 $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 如果

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k \leqslant c \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M \sum_{k=1}^{m} k a_k.$$

其中 m 是不超过 cn 的最大整数.

问题 58 (塞尔维亚, 1998)**.** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是使得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的实数. 证明不等式

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \cdots \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geqslant \frac{n^2}{2}$$

对一切正实数 a 成立, 并给出等号成立条件.

问题 59 (MM1488, Heinz-Jurgen Seiffert)**.** 设 n 是一个正整数, 且 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_n$, 证明

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\left(\sum_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{x_k}\right) \geqslant 2^n(n+1),$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

问题 60 (列宁格勒数学奥林匹克, 1968)**.** 给定实数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$. 记 $M = \max S$ 以及 $m = \min S$. 证明

$$(p-1)(M-m) \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i - a_j| \leqslant \frac{p^2}{4}(M-m).$$

问题 61 (列宁格勒数学奥林匹克, 1973)**.** 证明下列不等式

$$\sum_{i=0}^{8} 2^i \cos\left(\frac{\pi}{2^{i+2}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^{i+2}}\right)\right) < \frac{1}{2}.$$

问题 62 (列宁格勒数学奥林匹克, 2000)**.** 证明对所有 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$,

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n_1}x_1}{x_2} + \frac{x_nx_1}{x_2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$$

问题 63 (蒙古, 1996)**.** 证明对任意 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$,

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)\cdots\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right)\cdots\left(\frac{a_n+a_1+a_2}{3}\right).$$