不等式专题

习题集二

HOJOO LEE 编
(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (C2551, Panos E. Tsaoussoglou)**.** 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为正数. 设 $e_{j,k} = n-1$ 在 $j = k$ 时成立, 否则 $e_{j,k} = n-2$. 设 $d_{j,k} = 0$ 在 $j = k$ 时成立, 否则 $d_{j,k} = 1$. 证明

$$\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=1}^{n} e_{j,k} a_k^2 \geqslant \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} d_{j,k} a_k \right)^2 .$$

问题 2 (C2627, Walther Janous)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n (n \geqslant 2)$ 为正实数且 $x_1 + \cdots + x_n$. 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为非负实数. 求最大的 $C(n)$ 使得

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j \left(s_n - x_j\right)}{x_j} \geqslant C(n) \left(\prod_{j=1}^{n} a_j \right)^{\frac{1}{n}} .$$

问题 3 (匈牙利–以色列两国数学竞赛, 2000)**.** 设 k 和 l 是给定的正整数, 设 $a_{ij} (1 \leqslant i \leqslant k, 1 \leqslant j \leqslant l)$ 为正数. 证明: 如果 $q \geqslant p > 0$, 则

$$\left(\sum_{j=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{k} a_{ij}^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{l} a_{ij}^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

问题 4 (Kantorovich 不等式)**.** 设 $x_1 < \cdots < x_n$ 是给定的正数, 且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$ 和 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ 成立. 证明

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{x_i} \right) \leqslant \frac{A^2}{G^2},$$

其中 $A = \frac{x_1 + x_n}{2}$ 且 $G = \sqrt{x_1 x_n}$.

问题 5 (捷克–斯洛伐克–波兰竞赛, 2001)**.** 设 $n \geqslant 2$ 为整数, 求证

$$\left(a_1^3+1\right)\left(a_2^3+1\right)\cdots\left(a_n^3+1\right) \geqslant \left(a_1^2a_2+1\right)\left(a_2^2a_3+1\right)\cdots\left(a_n^2a_1+1\right)$$

对所有非负实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

问题 6 (C1868, De-jun Zhao)**.** 设 $n \geqslant 3$, $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > 0$, 且 $p > q > 0$. 证明

$$a_1^pa_2^q + a_2^pa_3^q + \cdots + a_{n-1}^pa_n^q + a_n^pa_1^q \geqslant a_1^qa_2^p + a_2^qa_3^p + \cdots + a_{n-1}^qa_n^p + a_n^qa_1^p.$$

问题 7 (波罗的海, 1996)**.** 求出使下列不等式对任意整数 $n > 2$ 和正实数 $x_1, \cdots, x_n$ 成立的 a, b:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \geqslant x_1^ax_2^bx_3^a + x_2^ax_3^bx_4^a + \cdots + x_n^ax_1^bx_2^a.$$

问题 8 (IMO 预选, 2000)**.** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是任意实数. 证明:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2}{1+x_1^2+x_2^2} + \cdots + \frac{x_n}{1+x_1^2+\cdots+x_n^2} < \sqrt{n}.$$

问题 9 (MM1479, Donald E. Knuth)**.** 设 M_n 是下式关于所有非负实数 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的最大值

$$\frac{x_n}{\left(1+x_1+\cdots+x_n\right)^2} + \frac{x_2}{\left(1+x_2+\cdots+x_n\right)^2} + \cdots + \frac{x_1}{\left(1+x_n\right)^2}.$$

求出最大值点, 将 M_n 用 M_{n-1} 表示出来, 并求 $\lim_{n\to\infty} M_n$.