不等式专题

习题集三

HOJOO LEE 编

(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (IMO 1971)**.** 证明下列命题对 $n=3$ 和 $n=5$ 成立, 但对其余 $n>2$ 不成立: 如果 $a_1,\cdots,a_n$ 是任意实数, 则

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{i\neq j}(a_i-a_j)\geqslant 0.$$

问题 2 (IMO 2003)**.** 设 $x_1\leqslant x_2\leqslant\cdots\leqslant x_n$ 为实数.

(1) 求证

$$\left(\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|x_i-x_j|\right)^2\leqslant\frac{2\left(n^2-1\right)}{3}\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\left(x_i-x_j\right)^2.$$

(2) 证明上式等号成立当且仅当 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 构成等差数列.

问题 3 (保加利亚, 1995)**.** 设 $n\geqslant 2$ 且 $0\leqslant x_1,\cdots,x_n\leqslant 1$. 求证

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)\leqslant\left[\frac{n}{2}\right]$$

并给出等号成立条件.

问题 4 (MM1407, M. S. Klamkin)**.** 给出下列和的最大值

$$x_1^p+x_2^p+\cdots+x_n^p-x_1^qx_2^r-x_2^qx_3^r-\cdots x_n^qx_1^r,$$

其中 p,q,r 使得 $p\geqslant q\geqslant r\geqslant 0$ 且 $0\leqslant x_i\leqslant 1$ 对任意 i 成立.

问题 5 (IMO 预选, 1998). 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且使得

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 1.$$

求证

$$\frac{a_1 a_2 \cdots a_n \left(1 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\right)}{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \cdots (1 - a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

问题 6 (IMO 预选, 1998). 设 $r_1, r_2, \cdots, r_n \geqslant 1$. 证明

$$\frac{1}{r_1 + 1} + \cdots + \frac{1}{r_n + 1} \geqslant \frac{n}{(r_1 \cdots r_n)^{\frac{1}{n}} + 1}.$$

问题 7 (波罗的海, 1991). 证明对任意实数 $a_1, \cdots, a_n$,

$$\sum_{1 \leqslant i, j \leqslant n} \frac{a_i a_j}{i + j - 1} \geqslant 0.$$

问题 8 (印度, 1995). 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是和为 1 的正实数. 证明

$$\frac{x_1}{1 - x_1} + \cdots + \frac{x_n}{1 - x_n} \geqslant \sqrt{\frac{n}{n - 1}}.$$

问题 9 (土耳其, 1997). 给定整数 $n \geqslant 2$, 对于满足 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 的正实数 $x_1, \cdots, x_n$, 求

$$\frac{x_1^5}{x_2 + x_3 + \cdots + x_n} + \frac{x_2^5}{x_3 + \cdots + x_n + x_1} + \cdots \frac{x_n^5}{x_1 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}$$

的最小值.