不等式专题

习题集四

HOJOO LEE 编

(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (中国, 1996)**.** 设 $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = 0, x_1, \cdots, x_n > 0$, 且 $x_1 + \cdots + x_n = 1$. 求证

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_0+\cdots+x_{i-1}}\sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

问题 2 (越南, 1998)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是满足

$$\frac{1}{x_1+1998} + \cdots + \frac{1}{x_n+1998} = \frac{1}{1998}.$$

的正实数. 证明

$$\frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{n-1} \geqslant 1998.$$

问题 3 (C2768 Mohammed Aassila)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n$ 为 n 个正实数, 证明

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1x_2+x_2^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2x_3+x_3^2}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{x_nx_1+x_1^2}} \geqslant \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

问题 4 (C2842, George Tsintsifas)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是正实数.

(1) 求证

$$\frac{x_1^n + \cdots + x_n^n}{nx_1 \cdots x_n} + \frac{n\,(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_1 + \cdots + x_n} \geqslant 2,$$

(2) 求证

$$\frac{x_1^n + \cdots + x_n^n}{x_1 \cdots x_n} + \frac{(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}}{x_1 + \cdots + x_n} \geqslant 1.$$

问题 5 (C2423, Walther Janous). 设 $x_1, \cdots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ 是使得 $x_1 + \cdots + x_n = 1$ 成立的正实数. 求证

$$\left(1+\frac{1}{x_1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{x_n}\right) \geqslant \left(\frac{n-x_1}{1-x_1}\right)\cdots\left(\frac{n-x_n}{1-x_n}\right)$$

并给出等号成立条件.

问题 6 (C1851, Walther Janous). 设 $x_1, \cdots, x_n$ $(n \geqslant 2)$ 是正实数且满足

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

证明

$$\frac{2\sqrt{n}-1}{5\sqrt{n}-1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{2+x_i}{5+x_i} \leqslant \frac{2\sqrt{n}+1}{5\sqrt{n}+1}.$$

问题 7 (C1429, D. S. Mitirinovic, J. E. Pecaric). 证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leqslant n-1$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 是 $n \geqslant 3$ 个正实数, 且记 $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.[1]

问题 8 (白罗斯, 1998, S. Sobolevski). 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是正实数, 证明:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{a_1}{a_n} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n},$$

以及

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \geqslant \frac{2k}{1+k^2} \cdot \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

其中 $k = \frac{a_n}{a_1}$.

问题 9 (香港, 2000). 设 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ 是 n 个满足

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

的实数. 证明

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + n a_1 a_n \leqslant 0.$$

[1]本题被译者修改, 原版本要求证明

$$\sup_{x_1, \cdots, x_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} = n-1.$$