不等式专题

习题集五

HOJOO LEE 编
(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (波兰, 2001)**.** 设整数 $n \geqslant 2$. 证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^i + \binom{n}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} i x_i$$

对所有非负实数 $x_1, \cdots, x_n$ 成立.

问题 2 (韩国, 1997)**.** 设 $a_1, \cdots, a_n$ 为正实数, 定义

$$A = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}, G = (a_1 \cdots {}_n)^{\frac{1}{n}}, H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

(1) 若 n 为偶数, 证明

$$\frac{A}{H} \leqslant -1 + 2\left(\frac{A}{G}\right)^n.$$

(2) 若 n 为奇数, 证明

$$\frac{A}{H} \leqslant -\frac{n-2}{n} + \frac{2(n-1)}{n}\left(\frac{A}{G}\right)^n.$$

问题 3 (罗马尼亚, 1996)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}$ 是正实数且使得

$$x_{n+1} = x_1 + \cdots + x_n.$$

求证

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i\left(x_{n+1} - x_i\right)} \leqslant \sqrt{x_{n+1}\left(x_{n+1} - x_i\right)}.$$

问题 4 (C2730, Peter Y. Woo). 以 $\mathrm{AM}(x_1,\cdots,x_n)$ 和 $\mathrm{GM}(x_1,\cdots,x_n)$ 分别表示正实数 $x_1,\cdots,x_n$ 的算术平均值和几何平均值. 给定正实数 $a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$.

(1) 证明

$$\mathrm{GM}(a_1+b_1,\cdots,a_n+b_n)\geqslant \mathrm{GM}(a_1,\cdots,a_n)+\mathrm{GM}(b_1,\cdots,b_n).$$

对任意实数 $t\geqslant 0$, 定义

$$f(t)=\mathrm{GM}(t+b_1,t+b_2,\cdots,t+b_n)-t.$$

(2) 证明 f 是单调递增函数, 且

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\mathrm{AM}(b_1,\cdots,b_n).$$

问题 5 (C1578, O. Johnson, C. S. Goodlad). 对给定的正实数 a_n, 求下式关于一切正实数 $a_1,\cdots,a_{n-1}$ 的最大值:

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(1+a_1)(a_1+a_2)(a_2+a_3)\cdots(a_{n-1}+a_n)}.$$

问题 6 (C1630, Isao Ashiba). 对 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的所有排列 $a_1,\cdots,a_{2n}$, 求

$$a_1a_2+a_3a_4+\cdots+a_{2n-1}a_{2n}$$

的最大值.

问题 7 (C1662, M. S. Klamkin). 证明

$$\frac{x_1^{2r+1}}{s-x_1}+\frac{x_2^{2r+1}}{s-x_2}+\cdots\frac{x_n^{2r+1}}{s-x_n}\geqslant\frac{4^r}{(n-1)n^{2r-1}}(x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_nx_1)^r$$

其中对于所有 i 有 $n>3$, $r\geqslant\frac{1}{2}$, $x_i\geqslant 0$, 以及 $s=x_1+\cdots+x_n$. 找出一组 s,r 使得不等号严格成立.

问题 8 (C1674, M. S. Klamkin). 给定正实数 r,s 以及整数 $n>\frac{r}{s}$, 求使得

$$\left(\frac{1}{x_1^r}+\frac{1}{x_2^r}+\cdots+\frac{1}{x_{n^r}^r}\right)(1+x_1)^s(1+x_2)^s\cdots(1+x_n)^s$$

最小的正实数 $x_1,\cdots,x_n$.

问题 9 (C1691, Walther Janous). 设 $n\geqslant 2$. 求

$$\frac{x_1}{x_2x_3\cdots x_n+1}+\frac{x_2}{x_1x_3\cdots x_n+1}+\cdots+\frac{x_n}{x_1x_2\cdots x_{n-1}+1}$$

关于 $x_1,\cdots,x_n\in[0,1]$ 的最佳上界.