不等式专题

习题集六

HOJOO LEE 编
(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (C1892, Marcin E. Kuczma)**.** 设 $n \geqslant 4$ 是整数, $x_1, \cdots, x_n$ 是使得 $x_{i-1}+x_i+x_{i+1}>0$ 对任意 i 成立的非负实数. 求出下列轮换和的上界和下界

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1}+x_i+x_{i+1}}.$$

并对于两种情形分别给出取等条件.

问题 2 (C1953, M. S. Klamkin)**.** 求实数 $r_1, \cdots, r_n$ 需要满足的充分必要条件, 使得

$$x_1^2+x_2^2+\cdot+x_n^2 \geqslant (r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)^2$$

对所有实数 $x_1, \cdots, x_n$ 成立.

问题 3 (C2018, Marcin E. Kuczma)**.** 求 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的重排列 $(x_1, \cdots, x_n)$ 的数量, 使得下列轮换和

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{n-1}-x_n|+|x_n-x_1|$$

分别取最大值和最小值.

问题 4 (C2214, Walther Janous)**.** 设 $n \geqslant 2$ 是自然数, 证明存在常数 $C=C(n)$ 使得对任意 $x_1, \cdots, x_n \geqslant 0$ 都有

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \leqslant \sqrt{\prod_{i=1}^{n}(x_i+C)}.$$

对给定的 n, 求最小的 $C(n)$. (例如 $C(2)=1$.)

问题 5 (C2615, M. S. Klamkin)**.** 设 $x_1, \cdots, x_n$ 是使得下式成立的非负实数

$$\sum_{\text{sym}} x_i^2 \sum_{\text{sym}} \left(x_i x_{i+1}\right)^2 = \frac{n(n+1)}{2},$$

(1) 求 $\sum_{\text{sym}} x_i$ 的最大值.

(2) 判断 $\sum_{\text{sym}} x_i$ 的最小值是否是 $\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$, 并给出证明.

问题 6 (土耳其, 1996)**.** 给定实数 $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n}, x_{2n+1} = 1$ 且设 $x_{i+1} - x_i \leqslant h$ 对 $1 \leqslant i \leqslant n$ 都成立, 求证

$$\frac{1-h}{2} < \sum_{i=1}^{n} x_{2i}\left(x_{2i+1} - x_{2i-1}\right) < \frac{1+h}{2}.$$

问题 7 (波兰, 2002)**.** 证明对任意整数 $n \geqslant 3$ 以及任意正数序列 $x_1, \cdots, x_n$, 下列两个不等式中至少有一者成立:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i+1} + x_{i+2}} \geqslant \frac{n}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{x_{i-1} + x_{i-2}} \geqslant \frac{n}{2}.$$

其中 $x_{n+1} = x_1,\ x_{n+2} = x_2,\ x_0 = x_n,\ x_{-1} = x_{n-1}$.

问题 8 (中国, 1997)**.** 设 $x_1, \cdots, x_{1997}$ 是满足下列条件的实数

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} \leqslant x_1, \cdots, x_{1997} \leqslant \sqrt{3}, \quad x_1 + \cdots + x_{1997} = -318\sqrt{3}.$$

求 $x_1^{12} + \cdots + x_{1997^{12}}$ 的最大值.

问题 9 (C2673, George Baloglou)**.** 给定整数 $n > 1$.

(1) 证明

$$\left(1 + a_1 \cdots a_n\right)^n \geqslant a_1 \cdots a_n \left(1 + a_1^{n-2}\right) \cdots \left(1 + a_1^{n-2}\right)$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n \in [1, \infty)$ 成立当且仅当 $n \geqslant 4$.

(2) 证明

$$\frac{1}{a_1\left(1 + a_2^{n-2}\right)} + \frac{1}{a_2\left(1 + a_3^{n-2}\right)} + \cdots + \frac{1}{a_n\left(1 + a_1^{n-2}\right)} \geqslant \frac{n}{1 + a_1 \cdots a_n}$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n > 0$ 成立当且仅当 $n \leqslant 3$.

(3) 证明

$$\frac{1}{a_1\left(1 + a_1^{n-2}\right)} + \frac{1}{a_2\left(1 + a_2^{n-2}\right)} + \cdots + \frac{1}{a_n\left(1 + a_n^{n-2}\right)} \geqslant \frac{n}{1 + a_1 \cdots a_n}$$

对任意 $a_1, \cdots, a_n > 0$ 成立当且仅当 $n \leqslant 8$.