不等式专题

习题集七

HOJOO LEE 编
(戴文晗 译)

请每位同学在提交作业时至少选择 9 题中的 4 题完成. 注意事项如下.

(1) 请务必标明你所选择的练习题的题号, 以便助教老师批改.

(2) 我们鼓励所有同学**尽可能地独立思考每一道习题**, 并**尽可能详细地写下答案**. 在独立思考并遇到障碍之前, 请不要和他人讨论或直接向老师索要答案.

(3) 若有任何思路或疑惑, 请尽可能清楚地写在作业纸上一并提交.

(4) 如有必要, 请装订你的作业纸, 以防遗失或污损.

来源缩写对照:

- [**C**] = CRUX with MAYHEM,
- [**MM**] = Mathematical Magazine,
- [**CMJ**] = The College Mathematics Journal.

问题 1 (C2557, Gord Sinnamon, Hans Heinig)**.**

(1) 证明对所有正实数序列 $\{x_i\}$ 有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j} x_i \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right)^2 \frac{1}{x_k}.$$

(2) 去掉因子 2, 上述不等式是否还成立?

(3) 求最小的常数 c, 使得用 c 替换上式中 2 的位置后, 不等式仍然成立.

问题 2 (C1472, Walther Janous)**.** 对每个整数 $n \geqslant 2$, 求最大的常数 C_n 使得

$$C_n \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i - a_j|$$

对所有满足 $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ 的实数 $a_1, \cdots, a_n$ 成立.

问题 3 (中国, 2002)**.** 给定 $c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. 求最小的常数 M, 使得对任意 $n \geqslant 2$ 以及实数 $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, 如果

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k a_k \leqslant c\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M\sum_{k=1}^{m} k a_k.$$

其中 m 是不超过 cn 的最大整数.

问题 4 (塞尔维亚, 1998)**.** 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是使得

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的实数. 证明不等式

$$\frac{a^{x_1-x_2}}{x_1+x_2} + \frac{a^{x_2-x_3}}{x_2+x_3} + \cdots \frac{a^{x_n-x_1}}{x_n+x_1} \geqslant \frac{n^2}{2}$$

对一切正实数 a 成立, 并给出等号成立条件.

问题 5 (MM1488, Heinz-Jurgen Seiffert)**.** 设 n 是一个正整数, 且 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_n$, 证明

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)\left(\sum_{j=0}^{n}\prod_{k=1}^{j}\frac{1}{x_k}\right) \geqslant 2^n(n+1),$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

问题 6 (列宁格勒数学奥林匹克, 1968)**.** 给定实数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$. 记 $M = \max S$ 以及 $m = \min S$. 证明

$$(p-1)(M-m) \leqslant \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |a_i - a_j| \leqslant \frac{p^2}{4}(M-m).$$

问题 7 (列宁格勒数学奥林匹克, 1973)**.** 证明下列不等式

$$\sum_{i=0}^{8} 2^i \cos\left(\frac{\pi}{2^{i+2}}\right)\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2^{i+2}}\right)\right) < \frac{1}{2}.$$

问题 8 (列宁格勒数学奥林匹克, 2000)**.** 证明对所有 $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$,

$$\frac{x_1x_2}{x_3} + \frac{x_2x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n_1}x_1}{x_2} + \frac{x_nx_1}{x_2} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i$$

问题 9 (蒙古, 1996)**.** 证明对任意 $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_2+a_3}{2}\right)\cdots\left(\frac{a_n+a_1}{2}\right) \\
\leqslant &\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\right)\left(\frac{a_2+a_3+a_4}{3}\right)\cdots\left(\frac{a_n+a_1+a_2}{3}\right).
\end{aligned}$$