THÉORIE DE GROTHENDIECK-MESSING, THÉORÈME DE SERRE-TATE ET CLASSIFICATION DE KISIN

OLIVIER BRINON

Table des matières

1. Théorie de Dieudonné et déformation des groupes de Barsotti-Tate

Soient p un nombre premier et X un schéma. Si $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et G est un préfaisceau en groupes abéliens sur X pour la topologie fppf, on pose $G(n) = \mathrm{Ker}(p^n : G \to G)$.

Définition 1.1. Un *groupe p-divisible* (ou encore *de Barsotti-Tate*) sur X est un faisceau en groupes abéliens G sur X pour la topologie fppf tel que :

(1) G est p-divisible, c'est à dire $p \colon G \to G$ est un épimorphisme ;

(2) G est de p-torsion, *i.e.* $G = \varinjlim_n G(n)$;

(3) $G(1)$ est représentable par un schéma en groupes fini et plat sur X.

Un morphisme de groupes p-divisibles sur X est un morphisme de faisceaux en groupes sur X. Les groupes p-divisibles sur X forment une catégorie qu'on note $\mathbf{BT}(X)$. Lorsque R est un anneau, on pose $\mathbf{BT}(R) = \mathbf{BT}(\mathrm{Spec}(R))$.

Remarque 1.2. Soit $G \in \mathbf{BT}(X)$.

(1) Il résulte de la théorie des schémas en groupes finis et plats sur un corps algébriquement clos que le rang de $G(1)$ sur X est de la forme p^h, où $h \colon X \to \mathbf{N}$ est une fonction localement constante, qu'on appelle la *hauteur* de G.

(2) Si $n, m \in \mathbf{N}_{>0}$, on a la suite exacte

$$0 \to G(n) \to G(n+m) \xrightarrow{p^n} G(m) \to 0.$$

Il en résulte par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le groupe $G(n)$ est représentable par un schéma en groupes fini et plat sur X de rang p^{nh} où h est la fonction du (1).

(3) Réciproquement, si $(G_n)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ est un système inductif de schémas en groupes finis et plats sur X tel que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, le groupe G_n est de rang p^{nh} (où $h \colon X \to \mathbf{N}$ est une fonction localement constante) et $G_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}(p^n : G_{n+1} \to G_{n+1})$, alors $\varinjlim_n G_n \in \mathbf{BT}(X)$.

1.3. Extension universelle d'un groupe de Barsotti-Tate.

Définition 1.4. Si $\mathscr{L}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, alors il définit un faisceau sur le site fppf de X par $\mathscr{L}(X') = \Gamma(X', f^*\mathscr{L})$ pour tout $f \colon X' \to X$. Si $\mathscr{L}$ est supposé localement libre de rang fini, alors le faisceau fppf ainsi défini est représentable par un schéma en groupes, localement isomorphe à un produit fini de $\mathbf{G}_a$. Un tel schéma en groupes s'appelle un *groupe vectoriel* sur X.

• <u>Construction A</u> Soit G un préfaisceau en groupes abéliens sur X pour la topologie fppf, dont le dual de Cartier $G^{\mathrm{D}} := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$ est représentable. Notons $e\colon X \to G^{\mathrm{D}}$ la section unité et $e_1\colon X \to G^{\mathrm{D}}_1 = \mathrm{Inf}^1\big(G^{\mathrm{D}}\big)$ le premier voisinage infinitésimal de e. On a un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-pointés}}(G^{\mathrm{D}}_1, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \xrightarrow{\sim} e^*\Omega^1_{G^{\mathrm{D}}/X}.$$

C'est un faisceau quasi-cohérent sur X qu'on note $\omega_{G^{\mathrm{D}}}$ (remarquons qu'on a $G^{\mathrm{D}}_1 \simeq \mathbf{Spec}\big(\mathcal{O}_X \oplus \omega_{G^{\mathrm{D}}}\big)\big)$. On note $\alpha\colon G \to \omega_{G^{\mathrm{D}}}$ le composé

$$G \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G^{\mathrm{D}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-pointés}}(G^{\mathrm{D}}_1, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) = \omega_{G^{\mathrm{D}}}.$$

On peut montrer (*cf* [23, I Proposition 1.4]) que α est un morphisme universel de G vers les $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents : le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, -)$ est représenté, sur la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents, par $\omega_{G^{\mathrm{D}}}$. La formation de α commute aux changements de base.

• <u>Construction B</u> Soit G un préfaisceau en groupes abéliens sur X pour la topologie fppf, tel que
(i) $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_a) = 0$;
(ii) $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_a)$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libre pour la topologie de Zariski.
On pose

$$\mathrm{V}(G) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}\big(\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_a), \mathcal{O}_X\big)$$

Si $\mathscr{L}$ est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules localement libre, alors $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}) = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_a) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathscr{L}$ et donc

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{V}(G), \mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}).$$

Cela signifie qu'il existe une extension

$$0 \to \mathrm{V}(G) \to \mathrm{E}(G) \to G \to 0$$

qui est universelle (initiale) parmi les exensions de G par un groupe vectoriel sur X.

Supposons maintenant que p est nilpotent sur X et $G \in \mathbf{BT}(X)$. Soit $n \in \mathbf{N}$ est tel que p^n est nul sur X. Alors $\omega_{G^{\mathrm{D}}} = \omega_{G^{\mathrm{D}}(n)}$, et c'est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini ([24, Remark 3.3.1]).

Soit $\mathscr{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini. Alors $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}) = 0$. En effet, si $f \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L})$, on a $f \circ p^n = p^n \circ f = 0$, donc $f = 0$ vu que p^n est un épimorphisme. En particulier, l'hypothèses (i) est vérifiée. Appliquons maintenant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(-, \mathscr{L})$ à la suite exacte $0 \to G(n) \to G \xrightarrow{p^n} G \to 0$: on a la suite exacte

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G(n), \mathscr{L}) \xrightarrow{\delta} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}) \xrightarrow{p^n} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}).$$

Comme $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L}) = 0$ et la multiplication par p^n est nulle sur $\mathscr{L}$, on a un isomorphisme $\delta\colon \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G(n), \mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L})$, et donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\omega_{G^{\mathrm{D}}(n)}, \mathscr{L}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathscr{L})$ en vertu de la propriété universelle de $\alpha\colon G(n) \to \omega_{G^{\mathrm{D}}(n)}$. En particulier, avec $\mathscr{L} = \mathbf{G}_a$, on a

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \mathbf{G}_a) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\omega_{G^{\mathrm{D}}}, \mathcal{O}_X)$$

de sorte que l'hypothèse (ii) est vérifiée. On dispose donc de l'extension universelle et on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & G(n) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & G \arrow[r, "p^n"] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \omega_{G^{\mathrm{D}}} \arrow[r] & \mathrm{E}(G) \arrow[r] & G \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de sorte qu'ici, $\mathrm{V}(G) = \omega_{G^{\mathrm{D}}(n)}$ et $\mathrm{E}(G) = \omega_{G^{\mathrm{D}}(n)} \overset{G(n)}{\amalg} G$. Tout ce qui précède reste vrai lorsque p est seulement supposé localement nilpotent sur X (par unicité, on a les conditions de recollement adéquates). Par ailleurs, ces constructions commutent aux changements de base. Elles sont aussi fonctorielles (*cf* [24, Proposition 4.1.5]) : si $G, H \in \mathbf{BT}(X)$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X)}(G, H)$, il existe un unique morphisme $\mathrm{E}(u)\colon \mathrm{E}(G) \to \mathrm{E}(H)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{V}(u)"] & \mathrm{E}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{E}(u)"] & G \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(H) \arrow[r] & \mathrm{E}(H) \arrow[r] & H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{V}(u)$ est l'application $\omega_{D^{\mathrm{D}}} \to \omega_{H^{\mathrm{D}}}$ déduite de u. L'unicité de $\mathrm{E}(u)$ résulte de $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G, \omega_{H^{\mathrm{D}}}) = 0$ (vu que $\omega_{H^{\mathrm{D}}}$ est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang fini). Pour l'existence, on a les diagrammes

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}(G) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \omega_{H^{\mathrm{D}}} \arrow[r] & \omega_{H^{\mathrm{D}}} \overset{\omega_{G^{\mathrm{D}}}}{\amalg} \mathrm{E}(G) \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \omega_{H^{\mathrm{D}}} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{E}(H) \times_H G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(H) \arrow[r] & \mathrm{E}(H) \arrow[r] & H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

il suffit de montrer que la deuxième ligne du premier diagramme est isomorphe à la première du deuxième. Cela résulte du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}, \omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(H(n), \omega_{H^{\mathrm{D}}}) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(H, \omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}) \arrow[d] \\ \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\omega_{G^{\mathrm{D}}(n)}, \omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}) \arrow[r, "\sim"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{gr}}(G(n), \omega_{H^{\mathrm{D}}}) \arrow[r, "\delta", "\sim"'] & \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}) \end{tikzcd}$$

et les deux lignes correspondent aux deux chemins pour envoyer $\mathrm{Id}_{\omega_{H^{\mathrm{D}}(n)}}$ dans $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathrm{gr}}(G, \omega_{H^{\mathrm{D}}(n)})$.

1.5. **Le site cristallin.**

Définition 1.6. Soient A un anneau et I un idéal de A. On dit que I est muni de puissances divisées lorsqu'on dispose d'une famille d'applications $(\gamma_n\colon I \to I)_{n \in \mathbf{N}_{>0}}$ vérifiant les conditions suivantes :

(1) $(\forall n \in \mathbf{N}_{>0})\ (\forall \lambda \in A)\ (\forall x \in I)\ \gamma_n(\lambda x) = \lambda^n \gamma_n(x)$;
(2) $(\forall n, m \in \mathbf{N}_{>0})\ (\forall x \in I)\ \gamma_n(x)\gamma_m(x) = \frac{(n+m)!}{n!m!}\gamma_{n+m}(x)$;
(3) $(\forall n \in \mathbf{N}_{>0})\ (\forall x, y \in I)\ \gamma_n(x+y) = \gamma_n(x) + \sum\limits_{i=1}^{n-1} \gamma_i(x)\gamma_{n-i}(y) + \gamma_n(y)$;
(4) $(\forall n, m \in \mathbf{N}_{>0})\ (\forall x \in I)\ \gamma_n(\gamma_m(x)) = \frac{(nm)!}{n!(m!)^n}\gamma_{nm}(x)$.

On pose $\gamma_0(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Les puissances divisées sont dites *nilpotentes* lorsqu'il existe un entier $N \in \mathbf{N}_{>0}$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$, tout $x_1, \ldots, x_k \in I$ et tout $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}_{>0}$ tels que $n_1 + \cdots + n_k \geq N$, on a $\gamma_{n_1}(x_1) \cdots \gamma_{n_k}(x_k) = 0$ (en particulier, on a $I^N = 0$).

Soient (A, I, γ) et (A', I', γ') comme ci-dessus. Un morphisme à puissances divisées $f\colon (A, I, \gamma) \to (A', I', \gamma')$ est un morphisme $f\colon A \to A'$ tel que $f(I) \subseteq I'$ et $\gamma'_n \circ f = \gamma_n$ sur I pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$.

Moralememt, les applications γ_n correspondent à l'opération $x \mapsto \frac{x^n}{n!}$. En particulier, lorsque A est une $\mathbf{Q}$-algèbre, on a existence et unicité des structures de puissances divisées sur les idéaux (ce n'est pas du tout le cas en général). Bien sûr, ces définitions s'étendent à des faisceaux d'idéaux sur des schémas.

Définition 1.7. Soit X un schéma. On note $X_{\text{N-cris}}$ le site dont les objets sont les couples $(U \hookrightarrow T, \gamma)$ où

- U est un ouvert de X ;
- $U \hookrightarrow T$ est une immersion *localement nilpotente* ;
- γ est une structure de puissance divisées localement nilpotentes sur l'idéal de l'immersion $U \hookrightarrow T$.

Les morphismes de $(U \hookrightarrow T, \gamma)$ vers $(U' \hookrightarrow T', \gamma')$ sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[d, hook, "f"'] & T \arrow[d, "g"] \\ U' \arrow[r, hook] & T' \end{tikzcd}$$

où $f\colon U \to U'$ est une inclusion et $g\colon T \to T'$ un morphisme à puissances divisées. La topologie sur $X_{\text{N-cris}}$ est définie par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes de $(U \hookrightarrow T, \gamma)$ sont les familles $\big\{(U_i \hookrightarrow T_i, \gamma_i)\big\}_{i\in I}$ telles que T_i est un ouvert de T pour tout $i \in I$ et $U = \bigcup\limits_{i\in I} U_i$.

Remarque 1.8. La donnée d'un faisceau $\mathscr{F}$ sur le site $X_{\text{N-cris}}$ équivaut à la donnée, pour tout $(U \hookrightarrow T, \gamma) \in X_{\text{N-cris}}$, d'un faisceau $\mathscr{F}_{(U\hookrightarrow T,\gamma)}$ sur T_{Zar}, de sorte que pour tout $(f, g)\colon (U \hookrightarrow T, \gamma) \to (U' \hookrightarrow T', \gamma') \in X_{\text{N-cris}}$, on a un morphisme $g^{-1}\mathscr{F}_{(U'\hookrightarrow T',\gamma')} \to \mathscr{F}_{(U\hookrightarrow T,\gamma)}$ (qui est un isomophisme lorsque T est un ouvert de T'), ces morphismes vérifiant la propriété de cocycle évidente.

Par exemple, on dispose du faisceau structural $\mathcal{O}_{X_{\text{N-cris}}}$ défini par $\mathcal{O}_{X_{\text{N-cris}}(U\hookrightarrow T,\gamma)} = \mathcal{O}_T$.

Définition 1.9. Soit $\mathscr{C}$ une catégorie fibrée sur la catégorie des schémas qui est un champ pour la topologie de Zariski (c'est-à-dire telle que les objets et les morphismes se recollent). Un cristal M à valeurs dans $\mathscr{C}$ sur X est la donnée, pour tout $(U \hookrightarrow T, \gamma) \in X_{\text{N-cris}}$, d'un objet $M_{(U\hookrightarrow T,\gamma)} \in \mathscr{C}_T$ tel que pour tout $(f, g)\colon (U \hookrightarrow T, \gamma) \to (U' \hookrightarrow T', \gamma') \in X_{\text{N-cris}}$, on a un isomorphisme

$$u_g\colon M_{(U\hookrightarrow T,\gamma)} \xrightarrow{\sim} g^* M_{(U'\hookrightarrow T',\gamma')}$$

de sorte que $g^*(u_{g'}) \circ u_g = u_{g'\circ g}$.

1.10. **Le cristal de Dieudonné d'un groupe de Barsotti-Tate.**

Définition 1.11. (*cf* [24, III Definition 2.1]) Soit X un schéma et $\mathscr{A}$ une $\mathcal{O}_X$-cogèbre quasi-cohérente et cocommutative. On appelle *cospectre* de $\mathscr{A}$ le foncteur contravariant sur $\mathbf{Sch}/X$ défini par

$$\mathbf{Cospec}(\mathscr{A})\colon X' \mapsto \big\{x \in \Gamma(X', \mathscr{A}_{X'}),\ \eta(x) = 1,\ \Delta(x) = x \otimes x\big\}$$

Cela définit un faisceau pour la topologie fpqc qui commute aux changements de base.

Par exemple, si A est $\mathcal{O}_X$-algèbre localement libre de rang fini, alors $\mathbf{Cospec}(A^\vee) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A)$ où $A^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(A, \mathcal{O}_X)$.

L'intérêt du cospectre est qu'il commute aux limites inductives : on peut interpréter un groupe de Barsotti-Tate, ou son extension universelle, comme un cospectre (alors qu'on ne peut pas le voir comme un spectre).

Définition 1.12. Soient X un schéma et $\mathscr{A}$ une cogèbre sur X, munie d'une augmentation $\varepsilon\colon \mathcal{O}_X \to \mathscr{A}$.

(1) Une section x de $\mathscr{A}$ est dite *primitive* lorsque $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Si $\eta\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ désigne l'application opposé, on a alors $\eta(x) = 0$ (car $(\mathrm{Id}_{\mathscr{A}} \otimes \eta) \circ \Delta = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$, de sorte que $x\eta(1)+\eta(x)1 = x$ et donc $\eta(x)1 = 0$ vu que $\eta(1) = 1_{\mathcal{O}_X}$, soit $0 = \eta(\eta(x)1) = \eta(x)\eta(1) = \eta(x)$).

(2) On note $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathscr{A})$ le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules dont les sections sur U sont les éléments primitifs de $\Gamma(U, \mathscr{A}_U)$, où les applications sont induites par celles module sous-jacent à $\mathscr{A}$.

(3) Si $\mathscr{A}$ est limite inductive de $\mathcal{O}_X$-algèbres finies localement libres, $G = \mathbf{Cospec}(\mathscr{A})$, alors on pose $\underline{\mathrm{Lie}}(G) = \underline{\mathrm{Lie}}(\mathscr{A})$.

Remarque 1.13. (1) $\underline{\mathrm{Lie}}(G)$ ne dépend que de la variété de Lie formelle $\overline{G} := \varinjlim\limits_k \mathrm{Inf}^k G$.

(2) En fait, on a une définition générale (et intuitive) du faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathscr{F})$ sur X_{fppf} pour tout faisceau $\mathscr{F}$ sur X_{fppf} par la formule

$$\underline{\mathrm{Lie}}(\mathscr{F})(X') = \mathrm{Ker}\left(f_* f^* \mathscr{F} \xrightarrow{\varepsilon\mapsto 0} \mathscr{F}\right)$$

où $f\colon \operatorname{Spec}\big(\mathcal{O}_X[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big) \to X$. C'est cohérent avec les définitions qui précèdent, car si $G = \mathbf{Cospec}(\mathscr{A})$, le module $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(X')$ est égal à

$$\operatorname{Ker}\Big(\big\{x = x_0 + \varepsilon x_1 \in \Gamma\big(X', \mathscr{A}_{\mathcal{O}'_X}[\varepsilon]/(\varepsilon^2)\big),\ \eta(x) = 1,\ \Delta(x) = x \otimes x\big\} \xrightarrow{\varepsilon \mapsto 0} \big\{x \in \Gamma(X', \mathscr{A}_{X'}),\ \eta(x) = 1,\ \Delta(x) = x \otimes x\big\}\Big).$$

Mais comme $\eta(x_0 + \varepsilon x_1) = \eta(x_0) + \varepsilon\eta(x_1)$ et $\Delta(x_0 + \varepsilon x_1) = \Delta(x_0) + \varepsilon\Delta(x_1)$, on a $x_0 + \varepsilon x_1 \in \underline{\mathrm{Lie}}(G)(X')$ si et seulement si $x_0 = 1 \in G(X')$, $\eta(x_1) = 0$ et $\Delta(x_1) = x_1 \otimes x_0 + x_0 \otimes x_1$. On a donc $\underline{\mathrm{Lie}}(G)(X') \simeq \big\{x_1 \in \Gamma\big(X', \mathscr{A}_{\mathcal{O}'_X},\ \eta(x_1) = 0,\ \Delta(x_1) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_1\big\}$ et on retrouve la définition précédente.

Proposition 1.14. *(cf* [24, Proposition IV.1.21]*) Soient X un schéma sur lequel p est localement nilpotent et $G \in \mathbf{BT}(X)$. Alors la suite*

$$0 \to \mathrm{V}(G) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G)) \to \underline{\mathrm{Lie}}(G) \to 0$$

est exacte.

Définition 1.15. Soit X un schéma sur lequel p est localement nilpotent et $G \in \mathbf{BT}(X)$. Soit $(U \hookrightarrow T, \gamma) \in X_{\text{N-cris}}$. Alors, localement sur U, le groupe de Barsotti-Tate G se relève à T en $\widetilde{G} \in \mathbf{BT}(T)$ (*cf* [16, Théorème 4.4]). On pose

$$\mathbf{E}(G)_{(U \hookrightarrow T,\gamma)} = \mathrm{E}\big(\widetilde{G}\big) \quad \text{et} \quad \mathbf{D}(G)_{(U \hookrightarrow T,\gamma)} = \underline{\mathrm{Lie}}\big(\mathrm{E}\big(\widetilde{G}\big)\big).$$

Cela ne dépend pas des relèvements, ce qui fait que c'est bien défini (pas seulement localement), et ce sont des cristaux sur X (*cf* [24, 2.5.3]).

L'ingrédient clé pour le montrer est l'énoncé suivant.

Théorème 1.16. *Soient A un anneau dans lequel p est nilpotent, $I \subseteq A$ un idéal muni de puissances divisées nilpotentes et $G, H \in \mathbf{BT}(A)$. Soient G_0 et H_0 les restrictions de G et H à* $\operatorname{Spec}(A/I)$*, et $u_0 \in \operatorname{Hom}_{BT(A/I)}(G_0, H_0)$. On a le diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{V}(G_0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{V}(u_0)"] & \mathrm{E}(G_0) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{E}(u_0)"] & G_0 \arrow[r] \arrow[d, "u_0"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{V}(H_0) \arrow[r] & \mathrm{E}(H_0) \arrow[r] & H_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique homomorphisme de groupes $v\colon \mathrm{E}(G) \to \mathrm{E}(H)$ (qui n'est pas forcément un morphisme d'extensions), tel que

(1) v relève $\mathrm{E}(u_0)$;

(2) Étant donné $w\colon \mathrm{V}(G) \to \mathrm{V}(H)$ relevant $\mathrm{V}(u_0)$, tel que $d := i \circ w - v_{|\mathrm{V}(G)}\colon \mathrm{V}(G) \to \mathrm{E}(H)$ est nul modulo I (où $i\colon \mathrm{V}(H) \hookrightarrow \mathrm{E}(H)$), alors d est une exponentielle (cf ci-dessous).

Remarque 1.17. Un petit calcul montre que v est indépendant de w.

Soient A un anneau et $I \subseteq A$ un idéal muni de puissances divisées nilpotentes. Posons $X = \operatorname{Spec}(A)$ et $X_0 = \operatorname{Spec}(A/I)$. Soient $\mathscr{M}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent et $\mathscr{A}$ une bialgèbre plate sur X. Posons $E = \mathbf{Cospec}(\mathscr{A})$ et $\overline{\mathscr{M}}\colon X' \mapsto \operatorname{Ker}\big(\Gamma(X', \mathscr{M}_{X'}), \Gamma(X'_{\mathrm{red}}, \mathscr{M}_{X'_{\mathrm{red}}})\big)$ (il s'agit de la variété de Lie formelle associée au groupe associé à $\mathscr{M}$). Alors on dispose d'un homomorphisme injectif (*cf* [24, III 2.3.3])

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{M}, \underline{\mathrm{Lie}}(E) \cap I\mathscr{A}) \xrightarrow{\exp} \operatorname{Ker}\big(\underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-}\mathrm{gr}}(\overline{\mathscr{M}}, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X_0\text{-}\mathrm{gr}}(\overline{\mathscr{M}}_0, E_0)\big)$$

défini de la façon suivante : si $\theta \in \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(\mathscr{M}, \underline{\mathrm{Lie}}(G) \cap I\mathscr{A})$ et x une section de $\overline{\mathscr{M}}$, alors

$$\exp(\theta)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\theta(x)).$$

Comme $\theta(x) \in \underline{\mathrm{Lie}}(E) \cap I\mathscr{A}$, chaque terme de la somme est bien défini, et il n'y en a qu'un nombre fini.

Si on suppose $\mathscr{M} = V$ fini localement libre et G tel que pour tout $k \in \mathbf{N}_{>0}$, le k-ième voisinage infinitésimal $\mathrm{Inf}^k\, G$ est localement libre de rang fini, on peut remplacer $\overline{\mathscr{M}}$ par V dans le morphisme qui précède (*cf* [24, III (2.4)]) : on a un homomorphisme injectif

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_X}(V, I\,\underline{\mathrm{Lie}}(E)) \xrightarrow{\exp} \mathrm{Ker}\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{X\text{-}\mathrm{gr}}(V, E) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X_0\text{-}\mathrm{gr}}(V_0, E_0)\right)$$

(remarquons que $\underline{\mathrm{Lie}}(E) \cap I\mathscr{A} = I\,\underline{\mathrm{Lie}}(E)$ par platitude de $\mathscr{A}$). Dans la suite, on appliquera ceci avec $V = \mathrm{V}(G)$ et $E = \mathrm{E}(H)$ pour $G, H \in \mathbf{BT}(X)$.

Remarque 1.18. La théorie de Dieudonné qui vient d'être présentée coïncide avec la théorie classique lorsque $X = \mathrm{Spec}(k)$ où k est un corps parfait de caractéristique p (il est facile de voir que la donné d'un cristal sur $\mathrm{Spec}(k)$ équivaut à celle d'un $\mathrm{W}(k)$-module, parce que $\mathrm{W}(k)$ est un épaississement à puissances divisées universel de k). Cela nécessite une vérification, faite dans [23, II §15].

1.19. **Déformation des groupes de Barsotti-Tate.**

Soit X un schéma sur lequel p est localement nilpotent et $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_X$ un idéal quasi-cohérent, muni de puissances divisées localement nilpotentes. Soit $X_0 \hookrightarrow X$ l'immersion fermée qu'il définit. C'est un objet de $(X_0)_{\text{N-cris}}$

Soit $G_0 \in \mathbf{BT}(X_0)$. On dispose de $\mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}$ et de $\mathbf{E}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}$.

Définition 1.20. (1) Une filtration $\mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right) \subseteq \mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}$ est dite *admissible* si Fil^1 est un sous-groupe vectoriel localement facteur direct qui relève

$$\mathrm{V}(G_0) \subseteq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G_0))$$

sur X_0.

(2) On note $\mathbf{DefBT}(X/X_0)$ la catégorie dont les objets sont les couples $\left(G_0, \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right)\right)$ où $G_0 \in \mathbf{BT}(X_0)$ et $\mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right) \subseteq \mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}$ est une filtration admissible. Un morphisme $\left(G_0, \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right)\right) \to \left(H_0, \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(H_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right)\right)$ dans $\mathbf{DefBT}(X/X_0)$ est un couple (u_0, ξ) où $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X_0)}(G_0, H_0)$ et

$$\xi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right), \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(H_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right)\right)$$

donnant lieu au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\xi"'] & \mathbf{D}(G_0)_{X_0\hookrightarrow X} \arrow[d, "\mathbf{D}(u_0)_{X_0\hookrightarrow X}"] \\ \mathrm{Fil}^1\left(\mathbf{D}(H_0)_{X_0\hookrightarrow X}\right) \arrow[r, hook] & \mathbf{D}(H_0)_{X_0\hookrightarrow X} \end{tikzcd}$$

qui relève

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}(G_0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{V}(u_0)"'] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G_0)) \arrow[d, "\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(u_0))"] \\ \mathrm{V}(H_0) \arrow[r, hook] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(H_0)) \end{tikzcd}$$

Théorème 1.21. [Grothendieck-Messing, [24, Theorem 1.6]] *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathbf{BT}(X) &\to \mathbf{DefBT}(X/X_0) \\ G &\mapsto \left(G \otimes_X X_0, \mathrm{V}(G) \hookrightarrow \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G))\right) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Si $G, H \in \mathbf{BT}(X)$, et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X)}(G, H)$, on notera G_0, H_0 et u_0 leurs restrictions à X_0.

$\boxed{\text{Le foncteur est fidèle}}$ Il s'agit de montrer que si $G, H \in \mathbf{BT}(X)$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X)}(G, H)$ sont tels que $u_0 \colon G_0 \to H_0$ et $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(u)) \colon \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G)) \to \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(H))$ sont nuls, alors u est nul. Montrons que $\mathrm{E}(u) = 0$. La question est locale sur X : on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine. Commençons par remarquer que $v_1 = \mathrm{E}(u)$ et $v_2 = 0$ relèvent tous les deux $\mathrm{E}(u_0) = 0 \colon \mathrm{E}(G_0) \to \mathrm{E}(H_0)$ (car

$u_0 = 0$). Par ailleurs, on a $\mathrm{V}(u) = 0$ (car $\underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(u)) = 0$), de sorte que tant v_1 que v_2 font commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{V}(u)"'] & \mathrm{E}(G) \arrow[d, dotted, "v"] \\ \mathrm{V}(H) \arrow[r, "i"] & \mathrm{E}(H) \end{tikzcd}$$

En particulier, si $w = \mathrm{V}(u) = 0\colon \mathrm{V}(G) \to \mathrm{V}(H)$, alors $d = i \circ w - v_{j|\mathrm{V}(G)} = 0$ est une exponentielle pour $j \in \{1, 2\}$. Par unicité dans le théorème 1.16, on a $v_1 = v_2$, *i.e.* $\mathrm{E}(u) = 0$, et donc $u = 0$.

$\boxed{\text{Le foncteur est plein}}$ Il s'agit de montrer que si $G, H \in \mathbf{BT}(X)$, $u_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X_0)}(G_0, H_0)$ et $\xi\colon \mathrm{V}(G) \to \mathrm{V}(H)$ sont tels que $\xi_0 = \mathrm{V}(u_0)$ et

$$\begin{tikzcd} \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G)) \arrow[r, equal] & \mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X} \arrow[d, "\mathbf{D}(u_0)_{X_0 \hookrightarrow X}"] \\ \mathrm{V}(H) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(H)) \arrow[r, equal] & \mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X} \end{tikzcd}$$

alors il existe $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X)}(G, H)$ relevant u_0 et tel que $\mathrm{V}(u) = \xi$. Grâce à la fidélité prouvée plus haut, on a unicité pour u, de sorte que la question est locale : on peut supposer $X = \mathrm{Spec}(A)$ affine. D'après le théorème 1.16, il existe un unique homomorphisme de groupes $v\colon \mathrm{E}(G) \to \mathrm{E}(H)$ qui relève $\mathrm{E}(u_0)$ et tel que $d := v_{|\mathrm{V}(G)} - i \circ \xi\colon \mathrm{V}(G) \to \mathrm{E}(H)$ est une exponentielle (où $i\colon \mathrm{V}(H) \hookrightarrow \mathrm{E}(H)$). Rappelons que v est indépendant de ξ. Comme $\underline{\mathrm{Lie}}(v) = \mathbf{D}(u_0)_{X_0 \hookrightarrow X}$ (par *définition* de $\mathbf{D}$), on a $\underline{\mathrm{Lie}}(d) = 0$. Cela implique que $d = 0$ *i.e.* $v_{|\mathrm{V}(G)} = i \circ \xi$: en passant au quotient, on en déduit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(X)}(G, H)$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & \mathrm{E}(G) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & G \arrow[r] \arrow[d, "u"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(H) \arrow[r] & \mathrm{E}(H) \arrow[r] & H \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

On a alors nécessairement $v = \mathrm{E}(u)$ (toujours par unicité dans le théorème 1.16), donc $\mathrm{V}(u) = \xi$.

$\boxed{\text{Le foncteur est essentiellement surjectif}}$ Soit $\big(G_0, \mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}\big)\big) \in \mathbf{DefBT}(X/X_0)$: on doit construire $G \in \mathbf{BT}(X)$ qui relève G_0 tel que $\mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}\big) \simeq \mathrm{V}(G) \subseteq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G))$. Si G existe, c'est nécessairement

$$G = \mathbf{E}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}/V \tag{$*$}$$

(où $\mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}\big)$). Il s'agit essentiellement de prouver que le groupe défini par $(*)$ est de Barsotti-Tate (c'est fait dans [24, p.155-157]). Par universalité, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{V}(G) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}(G) \arrow[r] \arrow[d, "v"] & G \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & \mathbf{E}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X} \arrow[r] & G \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Comme les deux lignes se restreignent en l'extension universelle de G_0 sur X_0, le morphisme $\mathrm{V}(G) \to V$ est un isomorphisme modulo $\mathscr{I}$ donc un isomorphisme (par Nakayama vu que $\mathscr{I}$ est nilpotent). L'application entre extensions est donc un isomorphisme. On en déduit que

$$\big(G_0, \mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_0)_{X_0 \hookrightarrow X}\big)\big) \simeq (G_0, \mathrm{V}(G) \subseteq \underline{\mathrm{Lie}}(\mathrm{E}(G))).$$

$\square$

2. Le théorème de Serre-Tate

Soient $N \in \mathbf{N}_{>0}$, R un anneau tué par N et $I \subseteq R$ un idéal nilpotent. Posons $R_0 = R/I$. On note $\mathscr{A}(R)$ la catégorie des schémas abéliens sur R et $\mathbf{Def}(R, R_0)$ la catégorie dont les objets sont les triplets (A_0, G, ε) où $A_0 \in \mathscr{A}(R_0)$, $G \in \mathbf{BT}(R)$ et $\varepsilon\colon G \otimes_R R_0 \xrightarrow{\sim} A_0(\infty)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{BT}(R_0)$.

Théorème 2.1. (Serre-Tate, [17, Theorem 1.2.1]) *Si $N = p^n$, le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(R) &\to \mathbf{Def}(R, R_0) \\ A &\mapsto \big(A \otimes_R R_0, A(\infty), \varepsilon \ \text{ naturel}\big) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories.

On suit fidèlement la preuve de Drinfeld, telle qu'elle est presentée dans [17]. Supposons $I^{\nu+1} = 0$ dans R. Si $\mathscr{G}$ est un foncteur sur la catégorie des R-algèbres, on note $\mathscr{G}_I$ et $\widehat{\mathscr{G}}$ les sous-foncteurs définis par $\mathscr{G}_I(R') = \operatorname{Ker}\big(\mathscr{G}(R') \to \mathscr{G}(R'/IR')\big)$ et $\widehat{\mathscr{G}}(R') = \operatorname{Ker}\big(\mathscr{G}(R') \to \mathscr{G}(R'^{\,\text{red}})\big)$ respectivement.

Lemme 2.2. *Si $\mathscr{G}$ est un faisceau abélien pour la topologie fppf sur R tel que $\widehat{\mathscr{G}}$ est localement représentable par un groupe de Lie formel, alors $\mathscr{G}_I$ est tué par N^ν.*

Démonstration. Comme I est nilpotent, on a $\mathscr{G}_I \subseteq \widehat{\mathscr{G}}$, de sorte que $\mathscr{G}_I = \widehat{\mathscr{G}}_I$: quitte à remplacer $\mathscr{G}$ par $\widehat{\mathscr{G}}$ et à localiser, *on peut supposer* que $\mathscr{G}$ est un groupe de Lie formel sur R. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont les coordonnées de $\mathscr{G}$, on a $([N](\underline{X}))_i = NX_i +$ termes de degré ≥ 2 en $X_1, \ldots, X_n$. Mais comme un point de $\mathscr{G}(R')$ est à coordonnées dans IR' et comme R' est tué par N (car c'est le cas pour R), on a $[N]\mathscr{G}_I \subseteq \mathscr{G}_{I^2}$. On a donc $[N]\mathscr{G}_{I^m} \subseteq \mathscr{G}_{I^{2m}} \subseteq \mathscr{G}_{I^{m+1}}$ pour tout $m \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $[N]^\nu \mathscr{G}_I = 0$. □

Lemme 2.3. *Soient $\mathscr{G}, \mathscr{H}$ des faisceaux abéliens pour la topologie fppf sur R vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $\mathscr{G}$ est N-divisble ;

(ii) $\widehat{\mathscr{H}}$ est localement représentable par un groupe de Lie formel ;

(iii) $\mathscr{H}$ est formellement lisse.

Notons $\mathscr{G}_0$ et $\mathscr{H}_0$ les images inverses de $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sur R_0. Alors :

(1) les groupe $\operatorname{Hom}_{R-\text{gr}}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ et $\operatorname{Hom}_{R_0-\text{gr}}(\mathscr{G}_0, \mathscr{H}_0)$ n'ont pas de N-torsion ;

(2) l'application de réduction modulo I

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{G}_0, \mathscr{H}_0)$$

et injective ;

(3) pour tout homomorphisme $f_0\colon \mathscr{G}_0 \to \mathscr{H}_0$, il existe un unique homomorphisme "$N^\nu f$" $\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$ qui relève $N^\nu f_0$;

(4) pour que $f_0\colon \mathscr{G}_0 \to \mathscr{H}_0$ se relève en $f\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$, il faut et suffit que l'homomorphisme "$N^\nu f$" annihile le sous-groupe $\mathscr{G}\big[N^\nu\big] = \operatorname{Ker}\big(N^\nu \colon \mathscr{G} \to \mathscr{G}\big)$.

Démonstration. Remarquons tout d'abord qu'en vertu des hypothèses, le faisceau $\mathscr{H}_I$ est tué par N^ν (*cf* lemme 2.2).

(1) Résulte de ce que $\mathscr{G}$ (et donc aussi $\mathscr{G}_0$) est N-divisible.

(2) On a $\operatorname{Ker}\big(\operatorname{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H}) \to \operatorname{Hom}(\mathscr{G}_0, \mathscr{H}_0)\big) = \operatorname{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H}_I)$, qui est nul parce que $\mathcal{G}$ est N-divisible alors que $\mathscr{H}_I$ est tué par N^ν.

(3) Notons déjà que d'après le point (2), si $N^\nu f$ existe, il est unique. Pour toute R-algèbre A, il est donné par le composé

$$\begin{tikzcd} \mathscr{G}(A) \arrow[r, dotted, "\text{"}N^\nu f\text{"}(A)"] \arrow[d, "\bmod I"'] & \mathscr{H}(A) \\ \mathscr{G}(A/IA) \arrow[r, "f_0(A/IA)"] & \mathscr{H}(A/IA) \arrow[u, "N^\nu \sigma"'] \end{tikzcd}$$

où $\sigma\colon \mathscr{H}(A/IA) \to \mathscr{H}(A)$ est n'importe quelle section du morphisme $\mathscr{H}(A) \to \mathscr{H}(A/IA)$ (qui est surjectif en vertu de la formelle lissité de $\mathscr{H}$ et de la nilpotence de I). L'application $N^\nu\sigma$ est alors bien définie, parce que deux sections ont une différence à valeurs dans $\mathscr{H}_I(A)$, qui est tué par N^ν.

(4) Supposons que $f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{G}, \mathscr{H})$ relève f_0. Alors par unicité dans (3), on a nécessairement $N^\nu f =$ ”$N^\nu f$”, et ce dernier tue $\mathscr{G}\big[N^\nu\big]$ (par unicité dans (3)).

Réciproquement, supposons que ”$N^\nu f$” dernier tue $\mathscr{G}[N^\nu]$. Comme $\mathscr{G}$ est N-divisible, on a la suite exacte

$$0 \to \mathscr{G}\big[N^\nu\big] \to \mathscr{G} \xrightarrow{N^\nu} \mathscr{G} \to 0$$

de sorte que ”$N^\nu f$” se factorise par N^ν, *i.e.* ”$N^\nu f$” $= N^\nu f$ pour un certain homomorphisme $f\colon \mathscr{G} \to \mathscr{H}$. Il s'agit de voir que f relève f_0. Mais modulo I, on a $N^\nu f = N^\nu f_0$ et $\mathrm{Hom}(\mathscr{G}_0, \mathscr{H}_0$ n'a pas de N-torsion d'après (1).

□

Démonstration du théorème 2.1. $\boxed{\text{Pleine fidélité}}$ Soient $A, B \in \mathscr{A}(R)$, $g\colon A(\infty) \to B(\infty)$ un morphisme dans $\mathbf{BT}(R)$ et $f_0\colon A_0 \to B_0$ un morphisme dans $\mathscr{A}(R_0)$ tel que $f_0(\infty)$ coïncide avec g_0. Il s'agit de montrer qu'il existe un unique morphisme $f\colon A \to B$ dans $\mathscr{A}(R)$ qui induit g et f_0.

Commençons par remarquer que les schémas abéliens et les groupes p-divisibles vérifient les conditions du lemme 2.3. L'unicité de $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, s'il existe, résulte donc de l'injectivité de $\mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A_0, B_0)$ (*cf* lemme 2.3 (2)). Pour son existence, on doit vérifier que le morphisme ”$N^\nu f$” (dont l'existence et l'unicité sont données par le lemme 2.3 (3)) tue $A\big[N^\nu\big]$. Mais comme ”$N^\nu f$” relève $N^\nu f_0$, le morphisme ”$N^\nu f$”(∞) relève $N^\nu f_0(\infty)$. Un autre relèvement est donné par $N^\nu g$: par injectivité de $\mathrm{Hom}(A(\infty), B(\infty)) \to \mathrm{Hom}(A_0(\infty), B_0(\infty))$ (*cf* lemme 2.3 (2)), on a nécessairement ”$N^\nu f$”$(\infty) = N^\nu g$. Il en résulte bien que ”$N^\nu f$” tue $A\big[N^\nu\big]$, de sorte que ”$N^\nu f$” $= N^\nu f$ avec $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ un relèvement de f_0. Le morphisme $f(\infty)$ est alors un relèvement de $f_0(\infty)$, tout comme g : par injectivité encore, on a $f(\infty) = g$.

$\boxed{\text{Essentielle surjectivité}}$ Soit $(A_0, G, \varepsilon) \in \mathbf{Def}(R, R_0)$. Comme R est un epaississement nilpotent de R_0, le schéma abélien A_0 se relève en $B \in \mathscr{A}(R)$ (*cf* [12, Exposé III] et [14, Exposé III]). On dispose alors d'un isomorphisme $\alpha_0\colon B_0 \xrightarrow{\sim} A_0$, qui induit un isomorphisme

$$\alpha_0(\infty)\colon B_0(\infty) \xrightarrow{\sim} A_0(\infty) \xrightarrow{\varepsilon^{-1}} G \otimes_R R_0$$

dans $\mathbf{BT}(R_0)$. On dispose donc (*cf* lemme 2.3 (3)) d'un unique morphisme ”$N^\nu\alpha(\infty)$” : $B(\infty) \to G$ dans $\mathbf{BT}(R)$ qui relève $N^\nu\alpha_0(\infty)$. Le morphisme ”$N^\nu\alpha(\infty)$” est une isogénie. En effet, on dispose d'un unique ”$N^\nu\alpha(\infty)^1$” relevant $N^\nu\alpha_0(\infty)^{-1}$, de sorte que (par unicité), les composés ”$N^\nu\alpha(\infty)$” $\circ$ ”$N^\nu\alpha(\infty)^{-1}$” ”$N^\nu\alpha(\infty)^{-1}$” $\circ$ ”$N^\nu\alpha(\infty)$” sont la multiplication par $N^{2\nu}$.

$$\begin{tikzcd} B(\infty) \arrow[r, bend left, "\text{”}N^\nu\alpha(\infty)\text{”}"] & G \arrow[l, bend left, "\text{”}N^\nu\alpha(\infty)^{-1}\text{”}"] \end{tikzcd}$$

On a donc une suite exacte

$$0 \to K \to B(\infty) \xrightarrow{\text{”}N^\nu\alpha(\infty)\text{”}} G \to 0 \tag{1}$$

où $K \subseteq B\big[N^{2\nu}\big]$. Montrons que K est un sous-groupe fini et plat de $B\big[N^{2\nu}\big] = B\big[p^{2n\nu}\big]$. Remarquons déjà que d'après le critère de platitude fibre par fibre (rappelé plus bas ; on peut l'appliquer parce que $B(\infty)$ est ind-plat sur R), le morphisme ”$N^\nu\alpha(\infty)$” : $B(\infty) \to G$ est plat car sa réduction modulo I l'est (étant la multiplication par N^ν composée avec un isomorphisme). Comme $K \to \mathrm{Spec}(R)$ se déduit de ”$N^\nu\alpha(\infty)$” par changement de base, il est plat. On peut donc former le schéma abélien quotient $A := B/K \in \mathscr{A}(R)$ (*cf* [13, Théorème 6.1]). Comme K relève $\mathrm{Ker}\big(N^\nu\alpha_0(\infty)\big) = B_0\big[N^\nu\big]$, A relève $B_0/B_0\big[N^\nu\big] \simeq B_0 \xrightarrow{\sim} A_0$, et la suite exacte (1) induit un isomorphisme $A(\infty) \simeq B(\infty)/K \xrightarrow{\sim} G$. □

Rappel 2.4. Le critère de platitude par fibres (*cf* [15, Corollaire 11.3.11]). Soient S un schéma, $g\colon X \to S$ et $h\colon Y \to S$ deux morphismes de schémas et $f\colon X \to Y$ un morphisme de S-schémas. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(1) g est plat et pour tout $s \in S$, le morphisme $f_s\colon X_s \to Y_s$ est plat ;
(2) h est plat en tous les points de $f(X)$ et f est plat.

Cas d'une variété abélienne ordinaire sur un corps algébriquement clos.

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique p et A une variété abélienne ordinaire sur k, de dimension g. cela signifie le groupe p-divisible $A(\infty)$ est canoniquement isomorphe au produit $\widehat{A} \times \mathrm{T}_p(A) \otimes_{\mathbf{Z}_p} (\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p)$ où $\widehat{A} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}(\mathrm{T}_p(A^t), \widehat{\mathbf{G}}_m)$ est un groupe formel toroidal (où A^t désigne la variété abélienne duale de A). Dans ce contexte, si R est un anneau local artinien de corps résiduel k, le théorème 2.1 se traduit de la façon suivante.

Théorème 2.5. *À toute déformation $\mathbb{A}$ de A à R, on peut associer une forme bilinéaire*

$$q(\mathbb{A}/R) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{T}_p\, A(k) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p\, A^t(k), \widehat{\mathbf{G}}_m(R)\big)$$

(on a $\widehat{\mathbf{G}}_m(R) = 1 + \mathfrak{m}_R$), et cela établit une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de déformations de A à R et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{T}_p\, A(k) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p\, A^t(k), \widehat{\mathbf{G}}_m(R)\big)$

En particulier, si $\widehat{\mathfrak{M}}_{A/k}$ désigne l'espace de module formel de A/k, alors on a un isomorphisme

$$\widehat{\mathfrak{M}}_{A/k} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}_p}\big(\mathrm{T}_p\, A(k) \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p\, A^t(k), \widehat{\mathbf{G}}_{\mathrm{m}}\big).$$

3. Cristaux et groupes de Barsotti-Tate

Soit K un corps de valuation discrète complet, de caractéristique mixte $(0,p)$, à corps résiduel parfait k. Soient ϖ une uniformisante de K, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $\mathcal{G}_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. On note v la valuation de $\overline{K}$, normalisée par $v(p) = 1$. On note C le complété de $\overline{K}$ pour la topologie p-adique. C'est un corps algébriquement clos. La valuation v et l'action de $\mathcal{G}_K$ s'étendent à C par continuité. Pour tout sous-corps F de C, on note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F et $\mathcal{G}_F = \mathrm{Gal}(\overline{K}/F)$ si $K \subseteq F \subseteq \overline{K}$.

Posons $W = \mathrm{W}(k)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k et notons σ l'endomorphisme de Frobenius sur W. On pose $K_0 = W[p^{-1}]$: on a alors $\mathcal{O}_K = W[\varpi]$ et le polynôme minimal de ϖ sur K_0 est un polynôme d'Eisenstein $E(u) \in W[u]$ de degré e. On se donne $\widetilde{\varpi} = \big(\varpi^{(n)}\big)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{O}_{\overline{K}}^{\mathbf{N}}$ une suite cohérente de racines p^n-ièmes de ϖ : on a $\varpi^{(0)} = \varpi$ et $\big(\varpi^{(n+1)}\big)^p = \varpi^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On pose $K_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} K\big[\varpi^{(n)}\big]$. C'est une extension totalement ramifiée de K.

3.1. Un épaississement à puissances divisées de $\mathcal{O}_K$.

Soit $\mathrm{D}_{W[u]}(E(u))$ l'enveloppe à puissances divisées de $W[u]$ relativement à l'idéal $(E(u))$, compatibles aux puissances divisées sur l'idéal (p).

On note S le séparé complété de $\mathrm{D}_{W[u]}(E(u))$ pour la topologie p-adique, et on note $\mathrm{Fil}^1(S)$ l'adhérence dans S de l'idéal à puissances divisées engendré par $E(u)$. C'est encore un idéal à puissances divisées et on a un isomorphisme

$$S/\,\mathrm{Fil}^1(S) \simeq W[u]/(E(u)) \simeq \mathcal{O}_K$$

induit par $u \mapsto \varpi$.

Remarque 3.2. (1) L'anneau S est local complet, d'idéal maximal $\mathfrak{m} = uS + \mathrm{Fil}^1(S)$. En effet, on a déjà $S/\mathfrak{m} \simeq \mathcal{O}_K/\varpi\mathcal{O}_K = k$. Par ailleurs, on a $\mathfrak{m}^{(e+1)p} \subseteq pS$ (car $u^{ep} = p!(u^e)^{[p]} \in pS$ et $x^p = p!x^{[p]} \in pS$ pour tout $x \in \mathrm{Fil}^1(S)$) et S est complet pour la topologie p-adique.

(2) L'anneau S ne dépend que de W et de l'entier e : comme $E(u) \equiv u^e \mod pW[u]$, on a $\mathrm{D}_{W[u]}(E(u)) = \mathrm{D}_{W[u]}(u^e)$, d'où l'égalité en passant aux complétés p-adiques. Par contre, l'idéal $\mathrm{Fil}^1(S)$ dépend bien sûr de $E(u)$.

3.3. On munit S d'un opérateur de Frobenius prolongeant σ sur W en posant $\sigma(u) = u^p$. Comme $\sigma(E(u)) \equiv E(u)^p \mod pW[u]$ d'où $\sigma(E(u)) \in p\mathrm{D}_{W[u]}(E(u))$, on a encore $\sigma(E(u)^{[n]}) \in$

$p\mathrm{D}_{W[u]}(E(u))$ pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, et donc $\sigma(\mathrm{Fil}^1(S)) \subseteq pS$ en passant aux complétés p-adiques. On pose

$$\begin{aligned} \sigma_1 \colon \mathrm{Fil}^1(S) &\longrightarrow S \\ x &\longmapsto \sigma(x)/p \end{aligned}$$

Définition 3.4. On note $\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi)$ la catégorie dont les objets sont les S-modules libres de rang fini M munis d'un sous-S-module $\mathrm{Fil}^1(M)$ et d'une application σ-linéaire $\varphi_1 \colon \mathrm{Fil}^1(M) \to M$ tels que

(a) $\mathrm{Fil}^1(S).M \subseteq \mathrm{Fil}^1(M)$ et $M/\mathrm{Fil}^1(M)$ est un $\mathcal{O}_K$-module libre ;

(b) l'application linéarisée $\sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} M$ est surjective

(les morphismes étant les applications S-linéaires respectant toutes les structures).

Remarque 3.5. (1) Si $M \in \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi)$, on peut le munir de l'opérateur de Frobenius φ défini par

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1}\varphi_1(E(u)m)$$

pour tout $m \in M$. Cette formule a bien un sens, car $\sigma_1(E(u)) \in S^\times$. En effet, écrivons

$$E(u) = p\lambda_e + \cdots + p\lambda_1 u^{e-1} + u^e$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_{e-1} \in W$ et $\lambda_e \in W^\times$. On a alors

$$\sigma_1(E(u)) = \sigma(\lambda_e) + \sigma(\lambda_{e-1})u^p + \cdots + \sigma(\lambda_1)u^{(e-1)p} + (p-1)!(u^e)^{[p]} \in W^\times + \mathfrak{m} \subseteq S^\times$$

(cf. remarque 3.2). En outre, pour $m \in \mathrm{Fil}^1(M)$, on a

$$\varphi(m) = \sigma_1(E(u))^{-1}\varphi_1(E(u)m) = \sigma_1(E(u))^{-1}\sigma(E(u))\varphi_1(m) = p\varphi_1(m).$$

(2) En général, le linéarisé $\sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} M$ n'est pas injectif, comme le montre déjà le cas $(S, \mathrm{Fil}^1(S), \sigma_1)$: on a $z = 1 \otimes E(u)^{[p]} - \sigma_1(E(u)) \otimes E(u)^{[p-1]} \mapsto 0 \in S$, mais $z \neq 0$.

3.6. **Lemmes techniques.**

3.7. Soit $f \colon A \to A_0$ une surjection de $\mathbf{Z}_p$-algèbres locales séparées et complètes pour la topologie p-adique, de corps résiduel k. On suppose A sans p-torsion, munie d'un endomorphisme σ relevant le Frobenius de A/pA et que $\mathrm{Fil}^1(A) := \mathrm{Ker}(f)$ est muni de puissances divisées.
Si $a \in \mathrm{Fil}^1(A)$, on a $\sigma(a) \equiv a^p \mod pA$, mais comme $a^p = p!\gamma_p(a)$ pour $a \in \mathrm{Fil}^1(A)$, on a $\sigma(a) \in pA$ pour tout $a \in \mathrm{Fil}^1(A)$: on pose $\sigma_1 = \sigma/p \colon \mathrm{Fil}^1(A) \to A$. On suppose en outre que l'application $\sigma^* \mathrm{Fil}^1(A) \xrightarrow{1\otimes\sigma_1} A$ est surjective (ce qui signifie que $\sigma_1(\mathrm{Fil}^1(A))A = A$).

Lemme 3.8. (*cf* [21, Lemma A.2]) *Pour $G \in \mathbf{BT}(A_0)$, on note $\mathrm{Fil}^1(\mathbf{D}(G)(A)) \subseteq \mathbf{D}(G)(A)$ la préimage de $(\mathrm{Lie}(G))^\vee \subseteq \mathbf{D}(G)(A_0)$. Alors :*

(1) la restriction de $\varphi \colon \mathbf{D}(G)(A) \to \mathbf{D}(G)(A)$ à $\mathrm{Fil}^1(\mathbf{D}(G)(A))$ est divisible par p (on pose alors $\varphi_1 = \varphi/p \colon \mathrm{Fil}^1(\mathbf{D}(G)(A)) \to \mathbf{D}(G)(A)$) ;

(2) l'application $\sigma^* \mathrm{Fil}^1(\mathbf{D}(G)(A)) \xrightarrow{1\otimes\varphi_1} \mathbf{D}(G)(A)$ est surjective.

Démonstration. Posons $M = \mathbf{D}(G)(A)$, et soit $\widetilde{G} \in \mathbf{BT}(A)$ un relèvement de G à A.

(1) On a $\mathrm{Fil}^1(M) = \big(\mathrm{Lie}\big(\widetilde{G}\big)\big)^\vee + \mathrm{Fil}^1(A)M$: comme $\sigma(\mathrm{Fil}^1(A)) \subseteq pA$ il suffit de voir que $\varphi\big(\big(\mathrm{Lie}\big(\widetilde{G}\big)\big)^\vee\big) \subseteq pM$, ce qui résulte du fait que φ induit l'application nulle sur $\big(\mathrm{Lie}\big(\widetilde{G} \otimes_A (A/pA)\big)\big)^\vee$.

(2) Il s'agit que montrer que $\varphi_1(\mathrm{Fil}^1(M))$ engendre M. Comme $\sigma_1(\mathrm{Fil}^1(A))A = A$, on a $\varphi(M) = \sigma_1(\mathrm{Fil}^1(A))A\varphi(M) \subseteq \varphi_1(\mathrm{Fil}^1(M))A$: il suffit de montrer que $\varphi_1(\mathrm{Fil}^1(M)) + \varphi(M)$ *i.e.* $(\varphi/p)(\mathrm{Fil}^1(M) + pM)$ engendre M.

<u>Cas où $A = W = \mathrm{W}(k)$</u>. Dans ce cas, M est le module de Dieudonné de $\widetilde{G}$ sur W (*cf* [23, II §15]) : on dispose du Frobenius $F = \varphi$ et du Verschiebung V. On a alors $\mathrm{Fil}^1(M) = V(F/p)(\mathrm{Fil}^1(M)) \subseteq V(M)$ d'où $\big(\mathrm{Lie}\big(\widetilde{G} \otimes_W k\big)\big)^\vee \subseteq V\big(\mathbf{D}\big(\widetilde{G} \otimes_W k\big)(k)\big)$. Mais ces deux

espaces s'identifient à $\mathbf{D}\big(\widetilde{G}\otimes_W k\big)(k)/F\big(\mathbf{D}\big(\widetilde{G}\otimes_W k\big)(k)\big)$: ils ont même dimension et sont donc égaux. Il en résulte que $\mathrm{Fil}^1(M)+pM=V(M)$: comme $(F/p)V=\mathrm{Id}_M$, on a fini.

Cas général. La projection $A\to k$ se relève en un homomorphisme $A\to \mathrm{W}(k)$ compatible aux Frobenius. En effet, il existe un unique homomorphisme $s_\sigma\colon A\to \mathrm{W}(A)$ qui est compatible aux Frobenius et telle que $\Phi_0\circ s_\sigma=\mathrm{Id}_A$. Il suffit de composer s_σ avec le morphisme $\mathrm{W}(A)\to\mathrm{W}(k)$ obtenu par fonctorialité.
Si $H=\widetilde{G}\otimes_A W$, alors $\mathbf{D}(H)(W)=M\otimes_A W$ (le foncteur de Dieudonné commute aux changements de base) et donc $(\varphi/p)(\mathrm{Fil}^1(M)+pM)\otimes_A W$ engendre $M\otimes_A W$ d'après le cas traité précédemment. Comme M est fini sur A, on peut appliquer le lemme de Nakayama.

□

Remarque 3.9. (D'après [4, §1, Exercice 14]) Notons F_A le morphisme de Frobenius de $\mathrm{W}(A)$ et Φ_n le n-ième polynôme de Witt. Il existe un unique homomorphisme $s_\sigma\colon A\to\mathrm{W}(A)$ tel que $\Phi_0\circ s_\sigma=\mathrm{Id}_A$ et $F_A\circ s_\sigma=s_\sigma\circ\sigma$.

On dispose de l'application composantes fantômes $\Phi_A\colon\ \mathrm{W}(A)\to A^{\mathbf{N}}$, où $\Phi_A=(\Phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont les polynômes de Witt. C'est un morphisme d'anneaux. D'après [4, §1, Proposition 2.2], il est injectif (car A n'a pas de p-torsion) d'image le sous-anneau

$$A'=\{(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\in A^{\mathbf{N}}/(\forall n\in\mathbf{N})\,\sigma(a_n)\equiv a_{n+1}\mod p^{n+1}A\}$$

(car A est muni d'un endomorphisme σ tel que $\sigma(a)\equiv a^p\mod pA$). Notons encore Φ_A l'isomorphisme induit $\mathrm{W}(A)\xrightarrow{\sim}A'$. Si $s_\sigma\colon A\to\mathrm{W}(A)$, posons $s'_\sigma=\Phi_A\circ s_\sigma\colon A\to A^{\mathbf{N}}$.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{W}(A) \arrow[d, "\Phi_A"] \\ A \arrow[ur, "s_\sigma"] \arrow[r, "s'_\sigma"'] & A^{\mathbf{N}} \end{tikzcd}$$

On a $\Phi_0\circ s_\sigma=s'_\sigma\circ\mathrm{pr}_0$ (où $\mathrm{pr}_0\colon A^{\mathbf{N}}\to A$ est la projection sur la composante d'indice 0). En outre, on a $F_A\circ s_\sigma=s_\sigma\circ\sigma\Leftrightarrow\Phi_a\circ F_A\circ s_\sigma=\Phi_a\circ s_\sigma\circ\sigma$ (car Φ_A est injective). Comme $\Phi_a\circ F_A=f_A\circ\Phi_A$ (où $f_A(a_0,a_1,\ldots)=(a_1,a_2,\ldots)$), on a $F_A\circ s_\sigma=s_\sigma\circ\sigma\Leftrightarrow f_A\circ s'_\sigma=s'_\sigma\circ\sigma$. Mais il existe un unique homomorphisme s'_σ tel que $s'_\sigma\circ\mathrm{pr}_0=\mathrm{Id}_A$ et $f_A\circ s'_\sigma=s'_\sigma\circ\sigma$: il est défini par $s'_\sigma(a)=(a,\sigma(a),\sigma^2(a),\ldots)$. Cela implique l'existence et l'unicité de s_σ.

3.10. Dans ce qui suit, un anneau *spécial* désigne une $\mathbf{Z}_p$-algèbre locale A séparée et complète pour la topologie p-adique, sans p-torsion, de corps résiduel k et munie d'un endomorphisme σ qui relève le Frobenius sur A/pA. On définit alors la catégorie $\mathscr{C}_A$ de la façon suivante. Les objets sont les triplets $(M,\mathrm{Fil}^1(M),\varphi)$ où

(1) M est un A-module libre de rang fini ;
(2) $\mathrm{Fil}^1(M)$ est un sous-A-module de M ;
(3) $\varphi\colon M\to M$ est une application σ-linéaire telle que $\varphi(\mathrm{Fil}^1(M))\subseteq pM$ et telle que l'application $\sigma^*\mathrm{Fil}^1(M)\xrightarrow{1\otimes(\varphi/p)}M$ est surjective.

Les morphismes $(M,\mathrm{Fil}^1(M),\varphi)\to(M',\mathrm{Fil}^1(M'),\varphi')$ sont les applications A-linéaires $f\colon M\to M'$ telles que $f(\mathrm{Fil}^1(M))\subseteq\mathrm{Fil}^1(M')$ et $f\circ\varphi=\varphi'\circ f$. Comme d'habitude, on désignera par abus les objets de $\mathcal{C}_A$ par le A-module sous-jacent.

Étant donné un morphisme d'anneaux spéciaux $A\to B$ (c'est-à-dire $\mathbf{Z}_p$-linéaire et compatible aux Frobenius), on a un foncteur $\mathscr{C}_A\to\mathscr{C}_B$ obtenu en associant à $M\in\mathscr{C}_A$ le module $M\otimes_A B$ muni du sous-B-module $\mathrm{Fil}^1((M\otimes_A B)$ image de $\mathrm{Fil}^1(M)\otimes_A B$ et de $\varphi_M\otimes\sigma_B$.

Lemme 3.11. *Soint A un anneau spécial et $M\in\mathscr{C}_A$. Alors l'application A-linéaire $1\otimes\varphi\colon\sigma^*M\to M$ est injective.*

Démonstration. L'application $1\otimes(\varphi/p)\colon\sigma^*M_1\to M$ est surjective par hypothèse : il en est de même de $1\otimes\varphi\colon\sigma^*M_1[p^{-1}]\to M[p^{-1}]$ et donc *a fortiori* de $1\otimes\varphi\colon\sigma^*M[p^{-1}]\to M[p^{-1}]$. Mais $\sigma^*M[p^{-1}]$ et $M[p^{-1}]$ sont des $A[p^{-1}]$-modules libres de même rang. L'application $1\otimes\varphi\colon\sigma^*M[p^{-1}]\to M[p^{-1}]$ est décrite dans des bases par une matrice inversible : elle est injective. Mais comme A est sans p-torsion et M libre sur A, on a $\sigma^*M\subseteq\sigma^*M[p^{-1}]$, ce qui permet de conclure. □

Soit $A \to B$ un morphisme surjectif d'anneaux spéciaux. Notons J son noyau et supposons que pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on a $\sigma^n(J) \subseteq p^{n+j_n} J$ où $(j_n)_{n \in \mathbf{N}_{>}0}$ est une suite d'entiers telle que $\lim\limits_{n \to \infty} j_n = \infty$.

Remarque 3.12. C'est en particulier le cas lorsque J est topologiquement engendré par une famille d'éléments $x_1, \ldots, x_r$ et leurs puissances divisées et que $\sigma(x_i) = x_i^p$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ (on peut alors prendre $j_n = v_p(p^n!) - n = \frac{p^{n-1}-1}{p-1} - n$.

Lemme 3.13. *Soient $M, M' \in \mathscr{C}_A$ et $\theta_B \colon M \otimes_A B \to M' \otimes_A B$ un isomorphisme dans $\mathscr{C}_B$. Alors il existe un unique isomorphisme $\theta_A \colon M \to M'$ qui relève θ_B et tel que $\theta_A \circ \varphi = \varphi' \circ \theta_A$.*

Démonstration. Soit $\theta_0 \colon M \to M'$ une application A-linéaire quelconque qui relève θ_B. On construit θ_A à partir de θ_0 par approximations successives. Comme $\sigma(J) \subseteq pA$, on peut supposer (quitte à remplacer $\mathrm{Fil}^1(M)$ par $\mathrm{Fil}^1(M) + JM$ et $\mathrm{Fil}^1(M')$ par $\mathrm{Fil}^1(M') + JM'$, ce qui n'affecte pas l'énoncé) que $JM \subseteq \mathrm{Fil}^1(M)$ et $JM' \subseteq \mathrm{Fil}^1(M')$. On a alors $\theta_0(\mathrm{Fil}^1(M)) \subseteq \mathrm{Fil}^1(M')$ (car $\theta_0(\mathrm{Fil}^1(M)) \subseteq \mathrm{Fil}^1(M') + JM'$ vu que modulo J on a $\theta_B(\mathrm{Fil}^1(M) \otimes_A B) \subseteq \mathrm{Fil}^1(M') \otimes_A B$).

Montrons qu'étant donnée une application A-linéaire $\theta \colon M \to M'$ qui relève θ_B et telle que $\theta(\mathrm{Fil}^1(M)) \subseteq \mathrm{Fil}^1(M')$, alors il existe une application A-linéaire $\widetilde{\theta} \colon M \to M'$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \arrow[r, "\sigma^*(\theta_{|\,\mathrm{Fil}^1(M)})"] \arrow[d, "1\otimes(\varphi/p)"'] & \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M') \arrow[d, "1\otimes(\varphi'/p)"] \\
M \arrow[r, dotted, "\widetilde{\theta}"] & M'
\end{tikzcd}$$

Comme $1 \otimes (\varphi/p) \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \to M$ est surjective, il s'agit de montrer que

$$\mathrm{Ker}(1 \otimes (\varphi/p) \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \to M) \subseteq \mathrm{Ker}\big((1 \otimes (\varphi'/p)) \circ \sigma^*(\theta_{0|\,\mathrm{Fil}^1(M)})\big).$$

Soit $x \in \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M)$ avec $(1 \otimes (\varphi/p))(x) = 0$. Notons $i \colon \mathrm{Fil}^1(M) \hookrightarrow M$ (resp. $i' \colon \mathrm{Fil}^1(M') \hookrightarrow M'$) l'inclusion. On a $(1 \otimes \varphi) \circ (\sigma^* i)(x) = (1 \otimes (\varphi/p))(px) = 0$: d'après le lemme 3.11, on a donc $(\sigma^* i)(x) = 0$ dans $\sigma^* M$. On a donc $(1 \otimes \varphi') \circ (\sigma^* \theta) \circ (\sigma^* i)(x) = (1 \otimes \varphi') \circ (\sigma^* \theta_{|M_1})(x) = 0$ *i.e.* $px \in \mathrm{Ker}\big((1 \otimes (\varphi'/p)) \circ \sigma^*(\theta_{0|M_1})\big)$. Comme M' est sans p-torsion, on a fini.

$$\begin{tikzcd}
\sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \arrow[rrr, "\sigma^*\theta_{|\,\mathrm{Fil}^1(M)}"] \arrow[dr, "\sigma^* i"] \arrow[dd, "1\otimes\varphi"'] & & & \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M') \arrow[dl, "\sigma^* i'"'] \arrow[dd, "1\otimes\varphi'"] \\
& \sigma^* M \arrow[r, "\sigma^*\theta"] \arrow[dl, "1\otimes\varphi"] & \sigma^* M' \arrow[dr, "1\otimes\varphi'"'] & \\
M & & & M'
\end{tikzcd}$$

L'application $\widetilde{\theta}$ relève elle aussi θ_B (cela résulte de la surjectivité de $1 \otimes (\varphi/p) \colon M_1 \otimes_A B \to M \otimes_A B$ en réduisant l'égalité $\widetilde{\theta} \circ (1 \otimes (\varphi/p)) = (1 \otimes (\varphi'/p)) \circ (\sigma^* \theta_{|M_1})$ modulo J). Comme $JM \subseteq \mathrm{Fil}^1(M)$ et $JM' \subseteq \mathrm{Fil}^1(M')$, on a en outre $\widetilde{\theta}(\mathrm{Fil}^1(M)) \subseteq \mathrm{Fil}^1(M')$.

Grâce à ce qui précède, on fabrique de proche en proche une suite $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de relèvements de θ_B à partir de θ_0 en posant $\theta_{n+1} = \widetilde{\theta}_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par construction, cette suite vérifie $\theta_{n+1} \circ (\varphi/p) = (\varphi'/p) \circ \theta_n$ et donc $(\theta_{n+1} - \theta_n) \circ (\varphi/p)^n = (\varphi'/p)^n \circ (\theta_1 - \theta_0)$ sur $\mathrm{Fil}^1(M)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $(\varphi/p)(\mathrm{Fil}^1(M))$ engendre M et $\mathrm{Im}(\theta_1 - \theta_0) \subseteq JM'$ (vu que θ_0 et θ_1 relèvent θ_B), on a $(\theta_{n+1} - \theta_n)(M) \subseteq (\sigma/p)^n(J)M' \subseteq p^{j_n} M'$. La suite $(\theta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est donc convergente, vers une application $\theta_A \colon M \to M'$ qui relève θ_B et telle que $\theta_A \circ (\varphi/p) = (\varphi'/p) \circ \theta_A$ sur $\mathrm{Fil}^1(M)$. On a alors

$$\theta_A \circ \varphi \circ (\varphi/p) = \theta_A \circ (\varphi/p) \circ \varphi = (\varphi'/p) \circ \theta_A \circ \varphi = \varphi' \circ \theta_A \circ (\varphi/p)$$

sur $\mathrm{Fil}^1(M)$ et donc $\theta_A \circ \varphi = \varphi' \circ \theta_A$ sur M vu que $(\varphi/p)(\mathrm{Fil}^1(M))$ engendre M.

Si $\theta'_A\colon M\to M'$ est un autre relèvement de θ_B tel que $\theta'_A\circ\varphi=\varphi'\circ\theta'_A$, on a $(\theta_A-\theta'_A)\circ(\varphi/p)^n=(\varphi'/p)^n\circ(\theta_A-\theta'_A)$ sur $\mathrm{Fil}^1(M)$ et donc $(\theta_A-\theta'_A)(M)\subseteq(\sigma/p)^n(J)M'\subseteq p^{j_n}M'$ pour tout $n\in\mathbf{N}$: on a $\theta'_A=\theta_A$. □

3.14. **Construction d'un foncteur de Dieudonné.**

Comme $S/\mathrm{Fil}^1(S)\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_K$ et comme $p^nS+\mathrm{Fil}^1(S)$ est un idéal à puissances divisées de S, pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on dispose de l'épaississement à puissances divisées $S\to\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K$.

Soit $G\in\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$. Il correspond (*cf* [9, Lemma 2.4.4]) à un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$, *i.e.* à un système $(G_n)_{n>0}$, où G_n est un groupe de Barsotti-Tate sur $\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K$ et $G_{n+1|\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K}\simeq G_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$. On peut alors évaluer le cristal de Dieudonné $\mathbf{D}(G_n)$ en l'épaississement $S\to\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K$, et on pose

$$\mathbf{M}(G)=\mathbf{D}(G)(S\to\mathcal{O}_K):=\varprojlim_{n>0}\mathbf{D}(G_n)(S\to\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K).$$

Proposition 3.15. *Cela définit un foncteur contravariant*

$$\mathbf{M}\colon\ \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)\longrightarrow\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi).$$

Démonstration. Cela définit déjà un foncteur contravariant de la catégorie $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des S-modules M libres de rang fini (S est local) munis d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire $\varphi\colon M\to M$.

Il s'agit de voir que le foncteur $\mathbf{M}$ est à valeurs dans $\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi)$. Le seul point délicat est le fait qu'il est muni d'un sous-S-module $\mathrm{Fil}^1\mathbf{M}(G)$ tel que $\mathrm{Fil}^1(S).\mathbf{M}(G)\subseteq\mathrm{Fil}^1\mathbf{M}(G)$ et tel que l'opérateur φ est divisible par p sur $\mathrm{Fil}^1\mathbf{M}(G)$ induisant $\varphi_1:=\varphi/p\colon\ \mathrm{Fil}^1\mathbf{M}(G)\to\mathbf{M}(G)$ dont le linéarisé est surjectif. Mais cela résulte du lemme 3.8 appliqué à $S\to\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K$ pour $n\in\mathbf{N}_{>0}$ en passant à la limite. □

Exemples : on a $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_p\,/\,\mathbf{Z}_p)=\big(S,\mathrm{Fil}^1(S),\sigma_1\big)$ et par dualité $\mathbf{M}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty))=\big(S,S,\sigma\big)$.

Remarque 3.16. Comme le foncteur de Dieudonné commute aux changements de base (cf. [2]), pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a

$$\mathbf{D}(G\otimes_{\mathcal{O}_K}k)(W)=\mathbf{D}(G_n)(S\to\mathcal{O}_K/\varpi^n\mathcal{O}_K)\otimes_S W$$

et donc

$$\mathbf{D}(G\otimes_{\mathcal{O}_K}k)(W)=\mathbf{M}(G)\otimes_S W=\mathbf{M}(G)/I_u\,\mathbf{M}(G)$$

en passant à la limite, où I_u est l'adhérence, pour la topologie p-adique, de l'idéal engendré par u et les puissances divisées de u^e.

Théorème 3.17. (Kisin [21, Proposition A.6]) *Si $p>2$, le foncteur $\mathbf{M}$ est une anti-équivalence. Si $p=2$, le foncteur $\mathbf{M}$ induit une équivalence entre les catégories à isogénie près.*

Démonstration. On construit un foncteur $\mathbf{G}$, quasi-inverse si $p\neq2$, quasi-inverse à isogénie près si $p=2$. Soit $(M,\mathrm{Fil}^1(M),\varphi)\in\mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi)$.

Construction de $\mathbf{G}$ modulo p

Pour $i\in\{1,\dots,e\}$, posons $R_i=W[u]/(u^i)$. On munit l'anneau R_i de l'endomorphisme de Frobenius défini par $\sigma(u)=u^p$. Posons

$$\begin{aligned}f_i\colon R_i&\to\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K\\ u&\mapsto\varpi\end{aligned}$$

c'est un homomorphisme surjectif de W-algèbres et $\mathrm{Ker}(f_i)=pR_i$, de sorte que f_i est un épaississement à puissances divisées de $\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K$. Par ailleurs, on a un morphisme (compatible aux Frobenius)

$$\begin{aligned}S&\to R_i\\ u&\mapsto u\\ (u^e)^{[j]}&\mapsto 0\quad\text{si } j>0\end{aligned}$$

On pose $M_i = R_i \otimes_S M$, que l'on munit de la filtration image $R_i \otimes_S \mathrm{Fil}^1(M)$ et de l'endomorphisme de Frobenius induit par $\sigma \otimes \varphi$. L'application S-linéaire surjective $1 \otimes \varphi_1 \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M) \to M$ induit un application R_i-linéaire surjective $1 \otimes \varphi_1 \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M_i) \to M_i$. Cela fait de M_i un objet de la catégorie $\mathscr{C}_{R_i}$.

Supposons $i = 1$. on a $R_1 = W$: notons F l'application $\varphi\colon M_1 \to M_1$. Munissons M_1 d'une structure de cristal de Dieudonné sur $\mathrm{Spec}(k)$: il s'agit de construire le morphisme de Verschiebung. Commençons par remarquer que M étant libre de rang fini sur S, il est de même de M_1 sur W. Par ailleurs, $\mathrm{Fil}^1(M_1)$ étant un sous-W-module de M_1, il est lui aussi libre de rang $\leq \mathrm{rg}_W(M_1)$. Mais comme l'homomorphisme $1 \otimes \varphi_1 \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M_1) \to M_1$ est surjectif, on a en fait $\mathrm{rg}_W(\mathrm{Fil}^1(M_1)) = \mathrm{rg}_W(M_1)$ et comme $1 \otimes \varphi_1 \colon \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M_1) \to M_1$ est un isomorphisme. L'homomorphisme linéarisé du morphisme de Verschiebung V est alors défini comme le composé

$$M_1 \xrightarrow{(1\otimes\varphi_1)^{-1}} \sigma^* \mathrm{Fil}^1(M_1) \subseteq \sigma^* M_1.$$

Comme le foncteur de Dieudonné est une équivalence entre $\mathbf{BT}(k)$ et la catégorie des modules de Dieudonné sur $\mathrm{Spec}(k)$, on dispose de $G_1 \in \mathbf{BT}(k)$ fonctoriellement associé à M_1. En particulier, on a un isomorphisme de φ-modules $\mathbf{D}(G_1)(W) \xrightarrow{\sim} M_1$, et via cet isomorphisme, $V\,\mathbf{D}(G_1)$ s'identifie à $\mathrm{Fil}^1(M_1)$ (*cf* preuve du lemme 3.8).

Supposons $i > 1$. Supposons en outre qu'on dispose de $G_{i-1} \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K/\varpi^{i-1}\mathcal{O}_K)$ et d'un isomorphisme de R_{i-1}-modules filtrés avec Frobenius $\theta_{i-1}\colon\ \mathbf{D}(G_{i-1})(R_{i-1}) \xrightarrow{\sim} M_{i-1}$.
Le noyau $\mathrm{Ker}\big(R_i \to \mathcal{O}_K/\varpi^{i-1}\mathcal{O}_K\big) = (p, u^{i-1})$ est muni de puissances divisées : on peut évaluer le cristal $\mathbf{D}(G_{i-1})$ en R_i. Notons $\mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_{i-1})(R_i)\big)$ la préimage de

$$\big(\mathrm{Lie}(G_{i-1})\big)^\vee \subseteq \mathbf{D}(G_{i-1})(\mathcal{O}_K/\varpi^{i-1}\mathcal{O}_K)$$

dans le R_i-module $\mathbf{D}(G_{i-1})(R_i)$. D'après le lemme 3.8 (avec $A \to A_0 = R_i \to \mathcal{O}_K/\varpi^{i-1}\mathcal{O}_K$), cela fait de $\mathbf{D}(G_{i-1})(R_i)$ un objet de $\mathscr{C}_{R_i}$. Par hypothèse, on dispose de l'isomorphisme

$$\theta_{i-1}\colon\ \mathbf{D}(G_{i-1})(R_{i-1}) \xrightarrow{\sim} M_{i-1} = M_i \otimes_{R_i} R_{i-1}$$

dans la catégorie $\mathscr{C}_{R_{i-1}}$. D'après le lemme 3.13 (avec $A \to B = R_i \to R_{i-1}$), il se relève de façon unique en un isomorphisme $\theta_i'\colon\ \mathbf{D}(G_{i-1})(R_i) \xrightarrow{\sim} M_i$ compatible avec les Frobenius.

Mais d'après le théorème 1.21, il existe un unique $G_i \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K)$, fonctoriel en G_{i-1} et en M tel que

(1) G_i relève G_{i-1} ;
(2) $\big(\mathrm{Lie}(G_i)\big)^\vee \subseteq \mathbf{D}(G_{i-1})(\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K)$ est égal à l'image du composé

$$\mathrm{Fil}^1(M_i) \subseteq M_i \xrightarrow{\theta_i'^{-1}} \mathbf{D}(G_{i-1})(R_i) \to \mathbf{D}(G_{i-1})(\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K).$$

Comme le foncteur $\mathbf{D}$ commute aux changements de base, on a un isomorphisme

$$\theta_i\colon\ \mathbf{D}(G_i)(R_i) \simeq \mathbf{D}(G_{i-1})(R_i) \xrightarrow{\theta_i'} M_i$$

compatible aux Frobenius. Il est aussi compatible aux filtrations, car $\mathrm{Fil}^1\big(\mathbf{D}(G_i)(R_i)\big)$ est la préimage de $\big(\mathrm{Lie}(G_i)\big)^\vee \subseteq \mathbf{D}(G_{i-1})(\mathcal{O}_K/\varpi^i\mathcal{O}_K)$, et c'est l'image de $\mathrm{Fil}^1(M_i)$.

Passage de $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ à $\mathcal{O}_K$

Le noyau du morphisme $S \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est $pS + \mathrm{Fil}^1(S)$: il est muni de puissances divisées. On peut donc évaluer le cristal $\mathbf{D}(G_e)$ et S. D'après le lemme 3.8, il est naturellement muni d'une filtration qui en fait un objet de $\mathscr{C}_S$. De même, M est un objet de la catégorie $\mathscr{C}_S$ par hypothèse. En outre, on dispose de l'isomorphisme $\theta_e\colon\ \mathbf{D}(G_e)(R_e) \xrightarrow{\sim} M_e = M \otimes_S R_e$ dans $\mathscr{C}_{R_e}$. En appliquant le lemme 3.13 (ce qui est licite vu que le noyau du morphisme surjectif $S \to R_e$ est l'adhérence de l'idéal à puissances divisées engendré par u^e), l'isomorphisme θ_e se relève de façon unique en un isomorphisme $\theta\colon\ \mathbf{D}(G_e)(S) \xrightarrow{\sim} M$ compatible aux Frobenius.

Premier cas : $p > 2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}_{>1}$, le noyau de $\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est à puissances divisée *nilpotentes*. En appliquant le théorème 1.21, le groupe p-divisible $G_e \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$ se relève de façon unique (et fonctorielle en M) en $G_{ne} \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)$ de sorte que $\big(\operatorname{Lie}(G_{ne})\big)^\vee \subseteq \mathbf{D}(G_e)(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)$ coïncide avec l'image du composé

$$\operatorname{Fil}^1(M) \subseteq M \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathbf{D}(G_e)(S) \to \mathbf{D}(G_e)(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K).$$

Mais la donnée d'une telle suite compatible de groupes p-divisibles $(G_{ne})_{n\in\mathbf{N}_{>0}}$ équivaut à celle d'un groupe p-divisible $G = \mathbf{G}(M) \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ (*cf* [9, Lemma 2.4.4]). D'après ce qui précède,

$$\mathbf{G}\colon\ \mathbf{MF}_S^{\mathbf{BT}}(\varphi) \to \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$$

est un foncteur. Par construction, on a $\mathbf{M}(\mathbf{G}(M)) \xrightarrow{\sim} M$. Par ailleurs, à chaque étape de la construction, on a unicité pour le relèvement, de sorte que $G \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(\mathbf{M}(G))$ modulo ϖ^n pour tout $n \in \mathbf{N}_{>0}$ et donc $G \xrightarrow{\sim} \mathbf{G}(\mathbf{M}(G))$.

Deuxième cas : $p = 2$.

Comme les puissances divisées sur le noyau de $\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ ne sont pas topologiquement nilpotentes, les choses se compliquent un peu. On munit $\operatorname{Ker}\big(\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K\big)$ de la structure de puissances divisées donnée par $p^{[j]} = 0$ si $j \geq 2$. Celles-ci sont nilpotentes, le groupe G_e se relève de façon unique (et fonctorielle en M) en $G'_{2e} \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K)$ tel que $\big(\operatorname{Lie}(G_{2e})\big)^\vee \subseteq \mathbf{D}(G_e)(\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K)$ est égal à l'image du composé

$$\operatorname{Fil}^1(M) \subseteq M \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathbf{D}(G_e)(S) \to \mathbf{D}(G_e)(\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K).$$

Par la suite, exactement comme dans le cas $p > 2$, le groupe p-divisible G'_{2e} se relève de façon unique (et fonctorielle en M) en $G = \mathbf{G}(M) \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ tel que $\big(\operatorname{Lie}(G)\big)^\vee$ est égal à l'image de $\operatorname{Fil}^1(M) \subseteq M \xrightarrow{\theta^{-1}} \mathbf{D}(G_e)(S) \to \mathbf{D}(G'_{2e})(\mathcal{O}_K)$, et par construction, on a $\mathbf{M}(\mathbf{G}(M)) \xrightarrow{\sim} M$. Par contre, il n'y a pas de raison que pour $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, on ait $\mathbf{G}(\mathbf{M}(G)) \xrightarrow{\sim} G$, parce que les puissances divisées qu'on a considéré sur $\operatorname{Ker}\big(\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K \to \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K\big)$ ne sont pas compatibles aux puissances divisées canoniques. En fait, les groupes p-divisibles $G_{2e} := G \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K)$ et $G'_{2e} := \mathbf{G}(\mathbf{M}(G)) \otimes_{\mathcal{O}_K} (\mathcal{O}_K/p^2\mathcal{O}_K)$ ne sont par isomorphes en général. Mais ils le sont modulo p : d'après le lemme 2.3 (3) (avec $N = p^2$ et $\nu = 1$), il existe des applications uniques $G_{2e} \xrightarrow{u_{2e}} G'_{2e}$ et $G'_{2e} \xrightarrow{v_{2e}} G_{2e}$ qui relèvent la multiplication par p^2. En appliquant de nouveau le théorème 1.21 (mais la pleine fidélité cette fois), ces applications se relèvent de façon unique en $G \xrightarrow{u} \mathbf{G}(\mathbf{M}(G))$ et $\mathbf{G}(\mathbf{M}(G)) \xrightarrow{v} G$. Par unicité, les composés $u \circ v$ et $v \circ u$ sont la multiplication par p^4, et on a fini. □

4. Groupes de Barsotti-Tate et représentations p-adiques

4.1. Rappels sur les représentations cristallines.

Définition 4.2. Un φ-module filtré sur K est un K_0-espace vectoriel de dimension finie D muni des structures supplémentaires suivantes :

(1) un opérateur de Frobenius $\varphi_D\colon D \to D$ qui est σ-linéaire et dont le linéarisé $\sigma^*D \to D$ est un isomorphisme ;

(2) une filtration decroissante séparée exhaustive $\operatorname{Fil}^\bullet D_K$ sur $D_K := K \otimes_{K_0} D$.

Les φ-modules filtrés sur K forment une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire qu'on dénote par $\mathbf{MF}_K(\varphi)$.

Remarque 4.3. Cette catégorie est équivalente à la catégorie des F-isocristaux sur k dont l'évaluation en un $(\mathcal{O}_K, p\mathcal{O}_K)$ est munie d'une filtration décroissante séparée exhaustive.

Définition 4.4. Soit $D \in \mathbf{MF}_K(\varphi)$. On dit que D est *effectif* si $\operatorname{Fil}^0 D_K = D_K$. On note $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{eff}}(\varphi)$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ constituée des φ-modules filtrés sur K relativement à K_0 qui sont effectifs.

On désigne par $\mathbf{MF}_K^{\mathbf{BT}}\,\varphi$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{eff}}\,\varphi$ constituée des φ-modules D tels que $\operatorname{Fil}^2 D_K = 0$.

4.5. Si $D \in \mathbf{MF}_K(\varphi)$ est de dimension 1, on a $D = K_0x$ et il existe $\alpha \in K_0$ et $i \in \mathbf{Z}$ tels que $\varphi(x) = \alpha x$, $Fil^iD_K = D_K$ et $Fil^{i+1}D_K = 0$. On pose $t_N(D) = v(\alpha)$ (cela ne dépend pas du choix de x) et $t_H(D) = i$. Si $D \in \mathbf{MF}_K(\varphi)$ est de dimension h, on a une structure de φ-module filtré sur K sur le K_0 espace vectoriel $\det(D) = \bigwedge^h D$, et on pose $t_N(D) = t_N(\det(D))$ et $t_H(D) = t_H(\det(D))$. On définit ainsi des fonctions additives sur la catégorie $\mathbf{MF}_K(\varphi)$.

Définition 4.6. Soit $D \in \mathbf{MF}_K(\varphi)$. On dit que D est *faiblement admissible* si

(1) $t_N(D) = t_H(D)$;

(2) $t_N(D') \geq t_H(D')$ pour tout sous-objet D' de D dans $\mathbf{MF}_K(\varphi)$.

On note $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{fa}}\,\varphi$ (resp. $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{fa,eff}}\,\varphi$, resp. $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{fa},\mathbf{BT}}\,\varphi$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{MF}_K(\varphi)$ (resp. $\mathbf{MF}_K^{\mathrm{eff}}\,\varphi$, resp. $\mathbf{MF}_K^{\mathbf{BT}}\,\varphi$) constituée des φ-modules filtrés sur K faiblement admissibles.

4.7. Rappelons la construction des anneaux $\mathrm{A_{cris}}$ et $\mathrm{B_{cris}}$, et l'équivalence de catégories entre la catégorie des représentations cristallines de $\mathcal{G}_K$ et celle des φ-modules filtrés sur K.

On note $\mathcal{R}$ la limite projective du système

$$\mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \mathcal{O}_{\overline{K}}/p\mathcal{O}_{\overline{K}} \leftarrow \cdots$$

les morphismes de transition étant donnés par le Frobenius. On a une bijection (compatible à la multiplication)

$$\left\{x = \left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathcal{O}_C^{\mathbf{N}},\ (\forall n \in \mathbf{N})\ \left(x^{(n+1)}\right)^p = x^{(n)}\right\} \to \mathcal{R}$$

donnée par la réduction modulo p. Par exemple, la suite $\widetilde{\varpi} = \left(\varpi^{(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ définit un élément de $\mathcal{R}$. L'anneau $\mathcal{R}$ est une $\mathbf{F}_p$-algèbre parfaite, valuée par $v_{\mathcal{R}}(x) = v\left(x^{(0)}\right)$ et munie d'une action de $\mathcal{G}_K$.

On dispose d'un homomorphisme surjectif et $\mathcal{G}_K$-équivariant d'anneaux

$$\begin{aligned} \theta\colon\ \mathrm{W}(\mathcal{R}) &\to \mathcal{O}_C \\ (x_0, x_1, \ldots) &\mapsto \sum_{n=0}^{\infty} p^n x_n^{(n)}. \end{aligned}$$

admettant pour noyau l'idéal principal engendré par $\xi = [\widetilde{p}] - p$ où $\widetilde{p} \in \mathcal{R}$ est tel que $\widetilde{p}^{(0)} = p$. L'anneau $\mathrm{A_{cris}}$ est alors le séparé complété, pour la topologie p-adique, de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathrm{W}(\mathcal{R})$ relativement à l'idéal $\mathrm{Ker}(\theta)$, compatibles aux puissances divisées canoniques sur l'idéal engendré par p. C'est une W-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_K$ et d'un opérateur de Frobenius φ. L'opérateur de Frobenius commute à l'action de $\mathcal{G}_K$. En outre, θ induit un homomorphisme surjectif $\theta\colon\ \mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$ dont le noyau admet des puissances divisées. Enfin, on dispose de $t = \log([\varepsilon]) \in \mathrm{A_{cris}}$ où $\varepsilon \in \mathcal{R}$ est tel que $\varepsilon^{(0)} = 1$ et $\varepsilon^{(1)} \neq 1$. On a $\varphi(t) = t^p$ et $\nabla(t) = 0$. On pose $\mathrm{B_{cris}} = \mathrm{A_{cris}}[t^{-1}]$, c'est une K_0-algèbre munie d'une action de $\mathcal{G}_K$ et d'un opérateur de Frobenius φ.

L'homomorphisme θ induit un homomorphisme de K-algèbres $\theta\colon\ \mathrm{W}(\mathcal{R})[p^{-1}] \to C$ et on note $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ le séparé complété de $\mathrm{W}(\mathcal{R})[p^{-1}]$ pour la topologie $\mathrm{Ker}(\theta)$-adique. C'est une K-algèbre (et même une $\overline{K}$-algèbre) munie d'une action de $\mathcal{G}_K$. On a $\mathrm{A_{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète complet, admettant t comme uniformisante et son corps résiduel s'identifie à C via θ. On pose $\mathrm{B_{dR}} = \mathrm{B_{dR}}[t^{-1}]$: on a une inclusion $\mathrm{B_{cris}} \subset \mathrm{B_{dR}}$ compatible à l'action de $\mathcal{G}_K$. Elle induit un homomorphisme de K-algèbres $K \otimes_{K_0} \mathrm{B_{cris}} \to \mathrm{B_{dR}}$. Ce dernier est injectif, et on a $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathcal{G}_K} = K_0$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathcal{G}_K} = K$.

4.8. Si $V \in \mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$, on pose

$$\mathrm{D_{cris}}(V) = (\mathrm{B_{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D_{dR}}(V) = (\mathrm{B_{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{\mathcal{G}_K}.$$

D'après ce qui precède, $\mathrm{D_{cris}}(V)$ est un K_0-espace vectoriel muni d'un opérateur de Frobenius σ-linéaire, et $\mathrm{D_{dR}}(V)$ est muni d'une filtration (décroissante séparée exhaustive). En outre, on a une application K-linéaire injective

$$K \otimes_{K_0} \mathrm{D_{cris}}(V) \to \mathrm{D_{dR}}(V).$$

Cela munit $\mathrm{D_{cris}}(V)$ d'une structure de φ-module filtré sur K (en munissant $\mathrm{D_{cris}}(V)_K$ de la filtration induite par celle de $\mathrm{D_{dR}}(V)$.

On dispose des applications de périodes

$$\alpha_{\mathrm{cris}}(V)\colon\ \mathrm{B_{cris}}\otimes_{K_0}\mathrm{D_{cris}}(V)\to\mathrm{B_{cris}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$$
$$\alpha_{\mathrm{dR}}(V)\colon\ \mathrm{B_{dR}}\otimes_{K}\mathrm{D_{dR}}(V)\to\mathrm{B_{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$$

dont on montre qu'elles sont toujours injectives ([8, Proposition 3.22]), de sorte que $\dim_{K_0}(\mathrm{D_{cris}}(V))\leq\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ et $\dim_K(\mathrm{D_{dR}}(V))\leq\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$. On dit que V est *cristalline* (resp. de *de Rham*) lorsque $\alpha_{\mathrm{cris}}(V)$ (resp. $\alpha_{\mathrm{dR}}(V)$) est un isomorphisme (*i.e.* lorsque $\dim_{K_0}(\mathrm{D_{cris}}(V))=\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$ (resp. $\dim_K(\mathrm{D_{dR}}(V))=\dim_{\mathbf{Q}_p}(V)$)). La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$ dont les objets sont les représentations cristallines (resp. de de Rham) est notée $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ (resp. $\mathbf{Rep}_{\mathrm{dR}}(\mathcal{G}_K)$). Si V est une représentation cristalline, alors V est de de Rham et l'homomorphisme $K\otimes_{K_0}\mathrm{D_{cris}}(V)\to\mathrm{D_{dR}}(V)$ est un isomorphisme ([8, Proposition 3.30]).

On peut en outre montrer ([8, Proposition 4.27 & Corollaire 4.37]) que si $V\in\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$, alors $\mathrm{D_{cris}}(V)\in\mathbf{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi)$, et que la restriction du foncteur $\mathrm{D_{cris}}$ à $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)$ induit une équivalence de catégories

$$\mathrm{D_{cris}}\colon\ \mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}(\mathcal{G}_K)\xrightarrow{\sim}\mathbf{MF}_K^{\mathrm{fa}}(\varphi),$$

dont un quasi-inverse est donné par

$$\mathrm{V_{cris}}(D)=(\mathrm{B_{cris}}\otimes_{K_0}D)^{\varphi=1}\cap\mathrm{Fil}^0(\mathrm{B_{dR}}\otimes_K D_K).$$

4.9. **Groupes de Barsotti-Tate et représentations cristallines.**

4.10. Si $G\in\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, on note $\mathrm{T}_p(G)=\mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_{\overline{K}})}(\mathbf{Q}_p\,/\,\mathbf{Z}_p,G\otimes_{\mathcal{O}_K}\mathcal{O}_{\overline{K}})$ son module de Tate. C'est un $\mathbf{Z}_p$-module libre de rang h (où h est la hauteur de G), muni d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_K$. On définit ainsi un foncteur de $\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$ dans la catégorie des $\mathbf{Z}_p$-modules munis d'une action linéaire continue de $\mathcal{G}_K$. Comme $\mathcal{O}_K$ est un anneau de valuation discrète dont le corps des fractions est de caractéristique 0, ce foncteur est pleinement fidèle (cf. [25, Corollary 1 of Theorem 4]).

On pose alors $\mathrm{V}_p(G)=\mathbf{Q}_p\otimes_{\mathbf{Z}_p}\mathrm{T}_p(G)$: on a $\mathrm{V}_p(G)\in\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K)$. D'après ce qui précède, on obtient ainsi un foncteur pleinement fidèle

$$\mathrm{V}_p\colon\ \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}\to\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(\mathcal{G}_K).$$

Le but de cette partie est de montrer que V_p est à valeurs dans la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathrm{cris}}^{\mathbf{BT}}(\mathcal{G}_K)$ des représentations cristallines à poids de Hodge-Tate dans $\{0,1\}$ (corollaire 4.14).

Lemme 4.11. *Si $G\in\mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\mathbf{M}(G)[p^{-1}]$ ne dépend (en tant que $S[p^{-1}]$-module muni d'un opérateur de Frobenius) que de la fibre spéciale $G_k:=G\otimes_{\mathcal{O}_K}k$, i.e. on a*

$$\mathbf{M}(G)[p^{-1}]=\mathbf{D}(G_k)(W)\otimes_W S[p^{-1}].$$

Démonstration. En effet, on a $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K=k\oplus k\overline{\varpi}\oplus\cdots\oplus k\overline{\varpi}^{e-1}$, avec $\overline{\varpi}^e=0$, et donc

$$\sigma^N(\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\subseteq k$$

pour $N\gg 0$. On a donc

$$\varphi^N\big(\mathbf{D}(G_e)(S\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)\big)\subseteq\mathbf{D}(G_k)(W)\otimes_W S$$

pour $N\gg\log(e)/\log(p)$ (rappelons que pour $n\in\mathbf{N}_{>0}$, on a $G_{ne}=G\otimes_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)$). Mais comme ce sont des cristaux de Dieudonné, le Frobenius est une isogénie, si bien que

$$\mathbf{D}(G_e)(S\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)[p^{-1}]=\mathbf{D}(G_k)(W)\otimes_W S[p^{-1}].$$

Mais comme p a des puissances divisées dans $\mathcal{O}_K$, on a

$$\mathbf{D}(G_{ne})(S\to\mathcal{O}_K/p^n\mathcal{O}_K)=\mathbf{D}(G_e)(S\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$$

pour tout $n\in\mathbf{N}_{>0}$, et donc $\mathbf{M}(G)=\mathbf{D}(G_e)(S\to\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K)$. □

4.12. Comme $\mathrm{A_{cris}}$ est une W-algèbre telle que $E([\widetilde{\varpi}])$ a des puissances divisées (car $\theta(E([\widetilde{\varpi}])) = E(\varpi) = 0 \in \mathcal{O}_C$), on a un plongement naturel

$$\begin{aligned} S &\to \mathrm{A_{cris}} \\ u &\mapsto [\widetilde{\varpi}]. \end{aligned}$$

Ce dernier est compatible aux filtrations et aux Frobenius.

On dispose d'un accouplement

$$\mathrm{T}_p(G) \times_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{M}(G) \to \mathrm{A_{cris}}$$

défini de la façon suivante. Si $x \in \mathrm{T}_p(G)$ et $m \in \mathbf{M}(G)$, alors

$$x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_{\overline{K}})}(\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\overline{K}})$$

induit

$$x \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{BT}(\mathcal{O}_C)}(\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p, G \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_C)$$

et comme $\mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$ est un épaississement à puissances divisées, x induit une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire compatible aux filtrations, aux Frobenius et à l'action de $\mathcal{G}_{K_\infty}$

$$\mathbf{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{A_{cris}},\mathrm{Fil}^\bullet,\varphi}(\mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G), \mathrm{A_{cris}})$$

(on a $\mathbf{M}(\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p) = (S, \mathrm{Fil}^1(S), \sigma_1, \mathrm{d})$), où $\mathbf{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}}$ désigne l'évaluation du morphisme $\mathbf{D}(x)$ en l'épaississement $\mathrm{A_{cris}} \to \mathcal{O}_C$, et l'image de (x, m) par l'accouplement est $\mathbf{D}(x)_{\mathrm{A_{cris}}}(1 \otimes m)$.

Cet accouplement donne lieu à une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire, compatible aux filtrations et aux Frobenius

$$\rho_G\colon\ \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G) \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee$$

où $\mathrm{T}_p(G)^\vee$ désigne le $\mathbf{Z}_p$-module dual de $\mathrm{T}_p(G)$, muni de l'action naturelle de $\mathcal{G}_K$. D'après le lemme 4.11, ρ_G induit

$$\rho_G[p^{-1}]\colon\ \mathrm{A_{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}(G_k)(W)[p^{-1}] \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee.$$

Par fonctorialité, cette application est $\mathcal{G}_K$ équivariante, il en est donc de même de ρ_G. Remarquons que ce n'est pas vraiment clair avec $\mathbf{M}(G)$, parce que c'est un S-module et $\mathcal{G}_K$ agit non trivialement sur S, vu que u correspond à $[\widetilde{\varpi}]$ dans $\mathrm{A_{cris}}$.

Proposition 4.13. ([11, Theorem 7]) *Le conoyau de ρ_G est tué par t.*

Rappelons l'idée de la preuve. On traite d'abord explicitement le cas où $G = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty)$, pour lequel $\mathbf{M}(G) = \big(S, S, \sigma\big)$ et $\mathrm{T}_p(G) = \mathbf{Z}_p(1)$, l'application ρ_G n'étant alors autre que l'inclusion $\mathrm{A_{cris}} \subset \mathrm{A_{cris}}(-1) = t^{-1}\,\mathrm{A_{cris}}$.

Le cas général s'en déduit de la façon suivante. Soit $y \in \mathrm{T}_p(G)^\vee$, alors $ty \in \mathrm{T}_p(G)^\vee(1) \simeq \mathrm{T}_p(G^{\mathsf{D}})$ (où G^{D} désigne le dual de Cartier de G) correspond à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p \to G^{\mathsf{D}}$ sur $\mathcal{O}_{\overline{K}}$, donc (en passant au dual) à un morphisme de groupes de Barsotti-Tate $(ty)^{\mathsf{D}}\colon G \to (\mathbf{Q}_p \,/\, \mathbf{Z}_p)^{\mathsf{D}} = \mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty)$, tel que $\mathrm{T}_p((ty)^{\mathsf{D}})^\vee\colon\ \mathbf{Z}_p\, t^{-1} = \mathrm{T}_p(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty))^\vee \to \mathrm{T}_p(G)^\vee$ envoie t^{-1} sur y.

Par ailleurs, comme $\mathcal{O}_C$ est une $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-algèbre et $\mathrm{A_{cris}}$ un épaississement à puissances divisées de $\mathcal{O}_C$, on en déduit une application $\mathrm{A_{cris}}$-linéaire

$$\mathbf{M}\left((ty)^{\mathsf{D}}\right)_{\mathrm{A_{cris}}}\colon\ \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty)) \to \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G).$$

On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G) \arrow[r, "\rho_G"] & \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(G)^\vee \\ \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty)) \arrow[u, "\mathbf{M}((ty)^{\mathsf{D}})_{\mathrm{A_{cris}}}"] \arrow[r, "\rho_{\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty)}"] & \mathrm{A_{cris}} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathrm{T}_p(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}(\infty))^\vee \arrow[u, "\mathrm{Id}_{\mathrm{A_{cris}}} \otimes \mathrm{T}_p((ty)^{\mathsf{D}})^\vee"'] \end{tikzcd}$$

de sorte que si $x = \mathbf{M}((ty)^{\mathsf{D}})_{\mathrm{A_{cris}}}(1 \otimes 1) \in \mathrm{A_{cris}} \otimes_S \mathbf{M}(G)$, on a

$$\rho_G(x) = \big(\mathrm{Id}_{\mathrm{A_{cris}}} \otimes \mathrm{T}_p((ty)^{\mathsf{D}})^\vee\big)(t \otimes t^{-1}) = t \otimes y,$$

et $t \otimes y \in \mathrm{Im}(\rho_G)$.

Corollaire 4.14. *Si $G \in \mathbf{BT}(\mathcal{O}_K)$, alors $\mathrm{V}_p(G) \in \mathbf{Rep}^{\mathbf{BT}}_{\mathrm{cris}}(G_K)$ et*
$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee) = \mathbf{D}(G_k)(W)[p^{-1}]$$
comme φ-modules sur K_0.

Démonstration. En inversant t, l'homomorphisme ρ_G induit un homomorphisme surjectif de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-modules
$$\rho_G[t^{-1}] \colon \ \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \mathbf{M}(G)[p^{-1}] \to \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee.$$
Comme les $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-modules $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{S[p^{-1}]} \mathbf{M}(G)[p^{-1}]$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee$ sont tous les deux libres de rang h (où h est la hauteur de G), l'homomorphisme $\rho_G[t^{-1}]$ est un isomorphisme. En outre, d'après le lemme 4.11, on a $\mathbf{M}(G)[p^{-1}] = \mathbf{D}(G_k)(W) \otimes_W S[p^{-1}]$: on dispose donc d'un isomorphisme $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$-linéaire, compatible aux filtrations, aux Frobenius et à l'action de $\mathcal{G}_K$
$$\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{K_0} \mathbf{D}(G_k)(W)[p^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_p(G)^\vee.$$
En prenant les invariants sous $\mathcal{G}_K$, on a donc
$$\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee) = \mathbf{D}(G_k)(W)[p^{-1}]$$
et $\dim_{K_0}(\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(\mathrm{V}_p(G)^\vee)) = h = \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{V}_p(G)^\vee)$: la représentation $\mathrm{V}_p(G)^\vee$ est donc cristalline, et il en est de même de la représentation $\mathrm{V}_p(G)$. Enfin, le fait que les poids de Hodge-Tate de $\mathrm{V}_p(G)$ sont dans $\{0,1\}$ résulte de [25, §4, Corollary 2]. □

Références

[1] P. Berthelot, Théorie de Dieudonné sur un anneau de valuation parfait, Annales Scientifiques de l'ENS $4^{\text{ème}}$ série, t. 13, p. 225-268, Gauthier-Villars (1980).

[2] P. Berthelot, L. Breen, W. Messing, Théorie de Dieudonné cristalline II, Lecture Notes in Mathematics **930**, x+261, Springer-Verlag (1982).

[3] P. Berthelot, W. Messing, Théorie de Dieudonné cristalline III. Théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, p. 173-247, Progress in Mathematics **86**, Birkhäuser (1990).

[4] N. Bourbaki, Algèbre commutative, Chapitre 9 : Anneaux locaux noethériens complets, Masson (1983).

[5] C. Breuil, Représentations p-adiques semi-stables et transversalité de Griffiths, Math. Ann. **307**, no. 2, p. 191-224 (1997).

[6] C. Breuil, Schémas en groupes et corps des normes (non publié) 13p, (1998).

[7] C. Breuil, Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés, Ann. Math. (2) **152**, no.2, 489-549 (2000).

[8] O. Brinon, Représentations cristallines dans le cas d'un corps residuel imparfait, Annales de l'Institut Fourier **56**, no. 4, p. 919-999, (2006).

[9] A.J. de Jong, Crystalline Dieudonné module theory via formal and rigid geometry, Publ. Math. de l'IHES **82**, p. 5-96, (1995).

[10] A.J. de Jong, Homomorphisms of Barsotti-Tate groups and crystals in positive characteristic, Invent. Math. **134**, no. 2, p. 301-333, Springer Verlag (1998).

[11] G. Faltings, Integral crystalline cohomology over very ramified valuation rings, JAMS **12**, no. 1, p. 117-144, (1999).

[12] A. Grothendieck, Revêtements étales et groupe fondamental (SGA1), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1960/1961, Documents Mathématiques **3**, SMF (2003).

[13] A. Grothendieck, Techniques de construction et théorèmes d'existence en Géométrie Algébrique III : préschemas quotients, Séminaire Bourbaki, $13^{\text{ème}}$ année, exposé **212**, (1961).

[14] A. Grothendieck, Schémas en groupes 1 (SGA3), Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1962/1964, LNM **151**, p. 83-158, (1970).

[15] A. Grothendieck, J. Dieudonné, Éléments de Géométrie Algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas (Troisième partie), Publ. Math. de l'I.H.E.S. **28**, p. 3-255, (1966).

[16] L. Illusie, Déformation des groupes de Barsotti-Tate, Séminaire sur les pinceaux arithmétiques : la conjecture de Mordell, Astérisque **127**, p. 151-196, SMF (1985).

[17] N. Katz, Serre-Tate local moduli, Surfaces algébriques (Séminaire de Géométrie Algébrique d'Orsay 1976-1978), LNM **868**, p. 138-202, Springer (1981).

[18] N. Katz, Slope filtration of F-crystals, Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I, Astérisque **63**, p. 113-163, SMF (1979).

[19] K. Kedlaya, A p-adic local monodromy theorem, Ann. of Math. **160** no. 1, p. 93-184 (2004).

[20] K. Kedlaya, Slope filtrations revisited, Doc. Math. **10**, p. 447-525 (2005).

[21] M. Kisin, Crystalline representations and F-crystals, in Algebraic Geometry and Number Theory, in Honor of Vladimir Drinfeld's 50th Birthday, Progeress in Math. **253**, Birkhäuser, (2006).

[22] H. Matsumura, Commutative ring theory, xiii+320, Cambridge university Press, (1986).

[23] B. Mazur, W. Messing, Universal extensions and one dimensional crystalline cohomology, Lecture notes in Mathematics **370**, vi+134, Springer Verlag, (1974).

[24] W. Messing, Crystals associated to Barsotti-Tate groups : with applications to abelian schemes, Lecture notes in Mathematics **264**, 190, Springer Verlag, (1972).

[25] J. Tate, p-divisible groups, Proceedings of a conference on local fields, p. 158-183, Springer Verlag (1967).

Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue J.B. Clément 93430 Villetaneuse, France
E-mail address: brinon@math.univ-paris13.fr